Analisi 1

Corso di Laurea in Matematica
prova del 17/09/2013

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione $x^2 = 5^{2-|x|}$ e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/8, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento In $\mathbb{R}$ consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 5^{2-|x|}$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. Poiché f è pari ne consideriamo la restrizione all'intervallo $[0, +\infty)$. In tale intervallo f è strettamente crescente. Ne consegue che se uno zero esiste nell'intervallo $[0, +\infty)$ questo è unico. f è continua e inoltre

$$f(1) = -4 < 0$$

mentre

$$f(2) = 3 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{3^2}{2^2} - 5^{1/2} > 0$$

in quanto equivalente a $3^4 > 5 \cdot 2^4$ che è vero in quanto equivalente a $81 > 80$. Allora si ha $x_0 \in (1, 3/2)$. Avendosi

$$f(\frac{5}{4}) = \frac{5^2}{2^4} - 5^{3/4} < 0$$

in quanto equivalente a $5^5 < 2^{16}$ che è vero in quanto, ad esempio,

$$5^5 < 6^5 = 2^5 3^5 < 2^5 4^5 = 2^5 2^{10} = 2^{15} < 2^{16}.$$

Allora si ha $x_0 \in (5/4, 3/2)$ e un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione richiesta è quindi $x_0 \simeq 11/8$. Siccome f è pari vi è anche un altro zero $x_1 \simeq -11/8$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^3}{n + a_n^2}, \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento La successione è ben definita perché il denominatore $n + a_n^2$ non si annulla mai. Osserviamo, poi, che

$$a_2 = \frac{\alpha^3}{1+\alpha^2} \begin{cases} \leq \alpha & \text{se } \alpha \geq 0, \\ > \alpha & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Dimostriamo che la successione è decrescente se $\alpha > 0$ e crescente se $\alpha < 0$. Se $\alpha = 0$ si ha $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ad esempio, nel caso $\alpha > 0$ si ha (facilmente per induzione) che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e inoltre

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_n^3}{n + a_n^2} < a_n \iff \frac{a_n^2}{n + a_n^2} < 1 \iff a_n^2 < n + a_n^2$$

che è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi (a_n) è decrescente. Nel caso $\alpha < 0$ si procede analogamente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in [-\infty, +\infty].$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ambo i membri dell'uguaglianza $a_{n+1} = \dfrac{a_n^3}{n + a_n^2}$ si ottiene $\ell = 0$ se $\ell \neq \pm\infty$.

Nel caso $\alpha > 0$ si ha che i termini della successione sono positivi, quindi $\ell \neq -\infty$, mentre il fatto che la successione è decrescente implica che $\ell \neq +\infty$. Si ha quindi $\ell = 0$. Allo stesso risultato si perviene nel caso $\alpha < 0$ con un ragionamento analogo.

3

Dimostrare che la funzione coseno è continua in $\mathbb{R}$.

Svolgimento Per le formule di prostaferesi e usando il fatto che la funzione seno è limitata e lipschitziana si ha

$$|\cos x - \cos y| = 2\Big|\operatorname{sen}(\frac{x+y}{2})\operatorname{sen}(\frac{x-y}{2})\Big| \leq |x-y|,$$

quindi il coseno è una funzione lipschitziana, e pertanto continua, su $\mathbb{R}$.

4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{1/(x \operatorname{sen} x)}.$$

Svolgimento Il limite si presenta in forma indeterminata 1^∞. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{1/(x \operatorname{sen} x)} &= \lim_{x\to 0}(1 - \operatorname{sen}^2 x)^{1/(x \operatorname{sen} x)} \\ &= \lim_{x\to 0}(1 - \operatorname{sen}^2 x)^{(-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x})(-\frac{\operatorname{sen} x}{x})} = \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$