Corso di Laurea in Matematica
Anno accademico 2011-2012

Analisi I - prima parte

PROVA DEL 17/09/2012

1 *(8 punti)*
Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\sqrt{2x} = 3 - \log_2(x^3 + 1),$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che x dev'essere ≥ 0. In $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{2x} + \log_2(x^3+1) - 3$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è strettamente crescente, quindi vi potrà essere al più uno zero. Inoltre

$$f(1) = -2 + \sqrt{2} < 0 \qquad \text{e} \qquad f(2) = 2\log_2 3 - 1 > 2 - 1 = 1 > 0.$$

f è continua, quindi per il teorema degli zeri esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \log_2 35 - 6 + \sqrt{3} > \log_2 32 - 6 + \sqrt{3} = \log_2 2^5 - 6 + \sqrt{3} = -1 + \sqrt{3} > 0.$$

Si ha allora $x_0 \in]1, 3/2[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 5/4$.

2 *(8 punti)*
Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{4}, \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento Osserviamo che

$$a_2 = \frac{\alpha^2 + 4}{4} \geq \alpha = a_1 \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{\left(\frac{\alpha^2+4}{4}\right)^2 + 4}{4} \geq \frac{\alpha^2 + 4}{4} = a_2.$$

Congetturiamo dunque che la successione sia crescente, cioè che $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ciò e vero in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq \frac{a_n^2 + 4}{4} \iff (a_n - 2)^2 \geq 0$$

e quest'ultima è banalmente vera. Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in [\alpha, +\infty].$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{4}$ si ottiene, per l'unicità del limite, che L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L^2 + 4}{4} \iff L = 2 \text{ o } L = +\infty.$$

Se $|\alpha| > 2$ allora si ha $a_2 = \frac{\alpha^2+4}{4} \geq |\alpha| > 2$ e, siccome la successione è crescente, allora il limite non può essere 2 e quindi $L = +\infty$. Se invece $|\alpha| \leq 1$ allora si dimostra facilmente per induzione che $|a_n| \leq 2\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e pertanto $L = 2$.

3 *(8 punti)*

Dimostrare che la somma di due funzioni lipschitziane è lipschitziana. Si può affermare la stessa cosa sul prodotto?

Svolgimento Siano f e g lipschitziane di constante L e M, rispettivamente. Allora

$$\begin{aligned} |(f+g)(x)-(f+g)(y)| &= |f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| \\ &\leq L|x-y| + M|x-y| = (L+M)|x-y| \end{aligned}$$

quindi $f+g$ è lipschitziana di costante $L+M$.

Sul prodotto non possiamo concludere nulla. Infatti esso può risultare una funzione lipschitziana come accade se $f(x) = x$ e $g(x) = 1$ ma anche non esserlo come nel caso $f(x) = g(x) = x$.

4 *(6 punti)*

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2/2} - \cos(\operatorname{sen} x)}{x^2}.$$

Svolgimento Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2/2} - \cos(\operatorname{sen} x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2/2} - 1 + 1 - \cos(\operatorname{sen} x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{x^2/2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos(\operatorname{sen} x)}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{x^2/2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x/2}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$