Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 17/9/2002

Analisi 1

1

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}$$

Svolgimento

Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Osservato che

$$\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}=\frac{\log(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}$$

e che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{2x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{sen}x}=2,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}=1$$

allora

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}=2.$$

2

Dimostrare che la funzione $f(x)=2x+3\log_2(1+x)$ assume il valore 3 in uno ed un sol punto x_0. Determinare un valore approssimato di x_0 con un errore inferiore a 2^{-3}, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Considerata la funzione $g(x)=f(x)-3$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $g(x_0)=0$. A tal fine osserviamo che $g:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua. Poiché

$$\lim_{x\to -1^+}g(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to +\infty}g(x)=+\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di g è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Poiché

$$g(0) = -3 < 0, \quad g(1) = 2 + 3\log_2 2 - 3 = 3\log_2 2 - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$$

allora $x_0 \in]0, 1[$. Poiché

$$g(\tfrac{1}{2}) = 1 + 3\log_2 \tfrac{3}{2} - 3 = 3(\log_2 3 - 1) - 2 = 3\log_2 3 - 5 < 0 \iff$$

$$\iff \log_2 3 < \tfrac{5}{3} \iff 3 < 2^{5/3} \iff 3^3 < 2^5 \iff 27 < 32$$

allora $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$. Poiché

$$g(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{3}{2} + 3\log_2 \tfrac{7}{4} - 3 = 3\log_2 7 - 2 + \tfrac{3}{2} - 3 = 3\log_2 7 - \tfrac{15}{2} > 0 \iff$$

$$\iff \log_2 7 > \tfrac{5}{2} \iff 7 > 2^{5/2} \iff 7^2 > 2^5 \iff 49 > 32$$

allora $x_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$. Ne consegue che un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq \frac{5}{8}$.

3

Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

e, qualora converga, determinarne la somma ricorrendo, ove necessario, all'utilizzo del principio di induzione.

Svolgimento

Osservato che

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$

allora la serie converge per il criterio del confronto. Si tratta inoltre di una serie telescopica, della quale è possibile determinare la somma. A tal scopo occorre scomporre il termine generale in una somma del tipo

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1}$$

con A e B opportuni numeri reali. Per determinarli basta ridurre il secondo membro allo stesso denominatore ottenendo

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{(A+B)n + A - B}{(n-1)(n+1)}.$$

Affinché i numeratori siano uguali occorre dunque che

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \iff A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}.$$

Si ha dunque

$$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Riassumendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \Big).$$

Per calcolare la somma conviene ora ragionare sulla serie a secondo membro. Scrivendo la somma parziale n-esima per esteso e facendo le opportune semplificazioni si osserva che

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \Big) &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Occorre dunque dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \Big) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n \geq 2.$$

Per $n = 2$ è vera perché si riduce a $2/3 = 2/3$. Supponendola vera per n occorre dimostrarla per $n + 1$, cioè

$$\sum_{k=2}^{n+1} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \Big) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Ciò è molto semplice in quanto

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \Big) &= \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \Big) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. Concludendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \Big) = \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \Big) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$