UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI UDINE
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA

Analisi 1

Corso di Laurea in Matematica
prova del 17/06/2013

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$x^2 = \sqrt{1 + \frac{1}{|x|}}$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/8, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - \sqrt{1 + \frac{1}{|x|}}$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. Siccome f è pari, basta studiare gli zeri della restrizione di f all'intervallo $(0, +\infty)$. Osserviamo che in questo intervallo si può togliere il valore assoluto, cioè $f(x) = x^2 - \sqrt{1 + \frac{1}{|x|}}$, e f risulta strettamente crescente. Ne consegue che se uno zero esiste nell'intervallo $(0, +\infty)$ questo è unico. f è continua e inoltre

$$f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0$$

in quanto $\sqrt{2} > \sqrt{1} = 1$, mentre

$$f(2) = 4 - \sqrt{\frac{3}{2}} > 0$$

in quanto $4^2 > \frac{3}{2} \iff 32 > 3$. Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \sqrt{\frac{5}{3}} > \frac{9}{4} - \sqrt{\frac{12}{3}} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$$

Allora si ha $x_0 \in (1, 3/2)$. Avendosi

$$f(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16} - \sqrt{\frac{9}{5}} > \frac{25}{16} - \sqrt{2} > 0$$

infatti $\frac{25}{16} - \sqrt{2} > 0 \iff 5^4 > 2^9 \iff 625 > 512$. Si ha dunque $x_0 \in (1, 5/4)$ e un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 9/8$. Siccome f è pari, esiste solo un altro zero di f il cui valore approssimato è $-9/8$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = \dfrac{n + a_n}{n+1}, \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Poich 'e il denominatore non si annulla mai, la successione è ben definita. Osserviamo, poi, che

$$a_2 = \frac{1+\alpha}{2} \begin{cases} \geq \alpha & \text{se } \alpha \leq 1, \\ < \alpha & \text{se } \alpha > 1, \end{cases}$$

mentre

$$a_3 = \frac{5+\alpha}{6} \begin{cases} \geq a_2 & \text{se } \alpha \leq 1, \\ < a_2 & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Congetturiamo dunque che la successione sia non decrescente se $\alpha \leq 1$ e non crescente se $\alpha > 1$.

Cominciamo dal caso $\alpha \leq 1$.

Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{n + a_n}{n+1} \geq a_n \iff 1 \geq a_n$$

e quest'ultima è facilmente dimostrabile per induzione. Dunque la successione è monotona non decrescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in (-\infty, 1].$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ambo i membri dell'uguaglianza $a_{n+1} = \dfrac{n + a_n}{n+1}$ si ottiene $\ell = 1$. Allo stesso si risultato si perviene, in modo analogo, se $\alpha > 1$.

In alternativa, si poteva riconoscere subito che

$$a_n = \frac{n! - 1 + \alpha}{n!}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},$$

dimostrarlo per induzione e calcolare direttamente il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! - 1 + \alpha}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(1 + \frac{-1+\alpha}{n!})}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{-1+\alpha}{n!}\big) = 1$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

3

Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Dimostrare o confutare le seguenti proposizioni:

1. $\inf\limits_A(-f) = \sup\limits_A f$;
2. $\inf\limits_A(-f) = -\sup\limits_A f$.

Svolgimento

La (1) è falsa, infatti presa ad esempio come f la costante 1 si ha $\inf_A(-f) = -1$ e $\sup_A f = 1$.

Dimostriamo che la (2) è vera. Cominciamo con il considerare il caso in cui $\sup_A f = a \in \mathbb{R}$. Per le proprietà del sup ciò equivale a

1. $a \geq f(x)\ \forall\, x \in A$,
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists\, x \in A\ :\ f(x) > a - \epsilon$.

D'altra parte, moltiplicando per -1 ambo i membri delle disuguaglianze si ha che queste sono equivalenti a

1. $-a \leq -f(x)\ \forall\, x \in A$,
2. $\forall \epsilon > 0\ \exists\, x \in A\ :\ -f(x) < -a + \epsilon$,

che, per le proprietà caratteristiche dell'inf, equivalgono a $\inf_A(-f) = -a$, cioè la tesi.

Nel caso rimanente in cui $\sup_A f = +\infty$ si ha che f non è limitata superiormente, quindi $-f$ non è limitata inferiormente e dunque $\inf_A(-f) = -\infty = -\sup_A f$, c.v.d.

4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x + \log x - 1)}{\frac{e^{2x}}{e^2} - 1}.$$

Svolgimento Il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$.

Col cambiamento di variabile $y = 1 + x$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x + \log x - 1)}{\frac{e^{2x}}{e^2} - 1} &= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y + \log(1+y))}{e^{2y} - 1} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y + \log(1+y))}{y + \log(1+y)} \frac{y + \log(1+y)}{2y} \frac{2y}{e^{2y} - 1} = 1\end{aligned}$$