**Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

Corso di Laurea in Matematica - prova del 17/3/2003

# Analisi 1

## 1

Sia $A$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione con la seguente proprietà: esiste una costante $H > 0$ tale che

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq H|x_1 - x_2|^{1/2} \quad \forall\, x_1, x_2 \in A;$$

($f$ si dice *hölderiana* di esponente $1/2$). Dimostrare che $f$ è continua in $A$.

### Svolgimento

Per definizione di funzione continua, basta verificare che

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0\ :\ x_1, x_2 \in A,\ |x_1 - x_2| < \delta_\epsilon \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon,$$

e a tal scopo basta scegliere $\delta_\epsilon = \epsilon^2/H^2$.

## 2

Studiare il comportamento al limite della successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt[4]{2 + a_n^2} \end{cases}$$

### Svolgimento

Poiché

$$2 + a_n^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora la successione è ben definita. Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \sqrt[4]{2} > a_1, \quad a_3 = \sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} > a_2, \quad a_4 = \sqrt[4]{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > a_3.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo per induzione. Dobbiamo provare che $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Per $n = 1$, $a_2 \geq a_1$ è vera.

Supponiamola vera per $n$ e la dimostriamo per $n+1$. Essendo $a_{n+1} \geq a_n$ allora

$$a_{n+2} = \sqrt[4]{2 + a_{n+1}^2} \geq \sqrt[4]{2 + a_n^2} = a_{n+1}.$$

Quindi, per induzione la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$a_n \to L = \sup a_n.$$

Passando al limite ambo i membri di

$$a_{n+1} = \sqrt[4]{2 + a_n^2}$$

si ha dunque

$$L = \sqrt[4]{2 + L^2}$$

cioè, elevando alla quarta, risolvendo in $L$, e osservando che $L \geq 0$, si ha $L = \sqrt{2}$ oppure $L = +\infty$. Ora osserviamo che se il limite è $\sqrt{2}$ allora, siccome la successione è crescente, deve succedere che $a_n \leq \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se invece il limite è $+\infty$, allora deve essere $a_n > \sqrt{2}$ per tutti gli $n$ abbastanza grandi. Per induzione si dimostra che $a_n \leq \sqrt{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$, e pertanto il limite è $\sqrt{2}$.

**3**

Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + \log_2(x+5) = 0$$

ammette un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

## Svolgimento

Considerata la funzione $f(x) = x^3 + \log_2(x+5)$, il problema consiste nel mostrare che esiste uno ed un sol punto $x_0$ tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f : ]-5, +\infty[ \to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e strettamente crescenti. Poiché

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto $x_0$ esiste e, per l'iniettività di $f$ è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione.

Avendosi $f(-1) = -1 + \log_2 4 = -1 + 2 = 1 > 0$ e $f(-2) = -8 + \log_2 3 < 0$ (in quanto $\log_2 3 < 8 \iff 3 < 2^8$ che è vero). Ne consegue che $x_0 \in ]-2, -1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $-3/2$ e si ha poi

$$f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{8} + \log_2 \frac{7}{2} < -\frac{27}{8} + \log_2 \frac{8}{2} = -\frac{27}{8} + 2 = -\frac{11}{8} < 0,$$

Ne consegue che $x_0 \in ]-3/2, -1[$ e pertanto un valore di $x_0$ con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq -5/4$.