Corso di Laurea in Matematica
Anno accademico 2010-2011

Analisi I

prova del 16/09/2011

1 *(9 punti)* Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$x \log_2(1 + x^2) = 8$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che la funzione che compare a secondo membro è definita su tuuto $\mathbb{R}$ e che per $x < 0$ il primo membro è negativo e il secondo positivo. Ne consegue che non esistono soluzioni in $]-\infty, 0[$.

In $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = x \log_2(1 + x^2) - 8$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. Come prodotto di funzioni continue non negative e strettamente crescenti f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Si ha

$$f(2) = 2 \log_2 5 - 8 \le 0,$$

infatti ciò equivale a $\log_2 5 \le 4 \iff 5 \le 2^4 = 16$ che è vera. Inoltre

$$f(3) = 3 \log_2 10 - 8 \ge 0$$

infatti quest'ultima equivale a $2^3 5^3 \ge 2^8 \iff 5^3 \ge 2^5 \iff 125 \ge 32$ che è vera. Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 2 e 3, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{5}{2}) = \frac{5}{2} \log_2 \frac{29}{4} - 8 \le \frac{5}{2} \log_2 \frac{36}{4} - 8 = \frac{5}{2} \log_2 3^2 - 8 = 5 \log_2 3 - 8 \le 0$$

infatti quest'ultima equivale a $3^5 \le 2^8 \iff 243 \le 256$ che è vera.

Allora si ha $x_0 \in]5/2, 3[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 11/4$.

2 *(9 punti)* Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n(n + a_n)}{n^2 + a_n^2}. \end{cases}$$

Svolgimento Anzitutto, la successione è ben definita perché la funzione $f_n(x) = \frac{x(n+x)}{n^2+x^2}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

I primi due termini della successione sono $a_2 = \frac{6}{5} < 2 = a_1$. Congetturiamo che la successione sia decrescente e lo dimostriamo. Si ha

$$a_{n+1} \le a_n \iff \frac{a_n(n + a_n)}{n^2 + a_n^2} \le a_n \iff n + a_n \le n^2 + a_n^2 \iff a_n^2 - a_n + n^2 - n \ge 0$$

e quest'ultima é vera per ogni $n \geq 2$ in quanto per tali n si ha $x^2 - x + n^2 - n \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (infatti $\Delta = 1 - 4(n^2 - n) < 0$). Dunque la successione è decrescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste quindi il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [0, 2]$$

(è facile infatti dimostrare per induzione che $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + a_n}{n^2 + a_n^2} = 0$$

allora, per il criterio del rapporto, si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3 *(6 punti)* Dimostrare la legge di annullamento del prodotto ricorrendo esclusivamente agli assiomi dei numeri reali.

Svolgimento Ricordiamo che la legge di annullamento del prodotto afferma che

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ o } b = 0.$$

($\Leftarrow$) Supponiamo che $a = 0$ (se $b = 0$ la dimostrazione è analoga). Allora, utilizzando nell'ordine l'ipotesi, l'opposto, la proprietà distributiva e di nuovo l'opposto, si ha si ha

$$ab = 0b = (a - a)b = ab - ab = 0.$$

($\Rightarrow$) Se $b = 0$ allora si ha la tesi. Se $b \neq 0$ allora, utilizzando nell'ordine l'uno, il reciproco, la proprietà associativa, l'ipotesi e la parte già provata, si ha

$$a = a1 = a(bb^{-1}) = (ab)b^{-1} = 0b^{-1} = 0.$$

4 *(6 punti)* Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\right)^{\frac{1}{2x}}.$$

Ricordando che $\lim_{x\to 0} x\mathrm{e}^x - 1 = 1$, abbiamo che il limite si presenta in forma indeterminata del tipo $1^{\pm\infty}$. Osservato che

$$\left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\right)^{\frac{1}{2x}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}}\right)^{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}}\right]^{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\frac{1}{2x}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}}\right)^{\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x^2}}\right]^{\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\frac{1}{2}},$$

che il termine dentro parentesi quadra tende ad e e si ottiene che

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1}\right)^{\frac{1}{2x}} = \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$