Analisi 1

1

Data la funzione $f(x) = x^3 \log(1 + x^2)$,

1. dire se è pari o dispari;
2. studiarne l'andamento di monotonia;
3. dimostrare che l'equazione
$$f(x) = 1$$
ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

1. f è definita su tutto $\mathbb{R}$ e inoltre $f(-x) = -f(x)$, quindi si tratta di una funzione dispari.

2. La restrizione di f all'intervallo $[0, +\infty[$ è una funzione strettamente crescente, in quanto prodotto di due funzioni strettamente crescenti e non negative (x^3 e $\log(1+x^2)$). Poiché f è dispari allora essa risulta strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

3. Con l'introduzione della funzione $g(x) = x^3 \log(1 + x^2) - 1$ il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un solo zero di g su $\mathbb{R}$ e determinarne un'opportuna appossimazione. La funzione g è continua, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, quindi per il teorema degli zeri esiste almeno un numero reale x_0 tale che $g(x_0) = 0$. Poichè g è strettamente monotona, al pari di f, allora x_0 è anche l'unico zero di g.

Poiché $g(1) = \log 2 - 1 < 0$ e $g(2) = 8 \log 5 - 1 > 0$ allora $x_0 \in]1, 2[$.

Applicando il metodo di bisezione determiniamo dunque il segno di
$$f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} \log\big(1 + \frac{9}{4}\big) - 1.$$
Avendosi
$$\frac{27}{8} \log\big(1 + \frac{9}{4}\big) - 1 > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \log\big(\frac{13}{4}\big) > \frac{8}{27} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{13}{4} > \mathrm{e}^{8/27}$$
e poiché quest'ultima disuguaglianza è vera in quanto
$$\frac{13}{4} > \frac{12}{4} = 3 > \mathrm{e} > \mathrm{e}^{8/27}$$
allora $f(3/2) > 0$ e pertanto $x_0 \in]1, 3/2[$. Un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4 è quindi $x_0 \simeq 5/4$.

2

Determinare il carattere delle serie

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{3/2}}$;

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^n)}{n^{5/2}}$.

Svolgimento

1. Osserviamo anzitutto che trattasi di una serie a termini positivi. Ricordando che per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\epsilon} = 0$$

e pertanto, in corrispondenza ad ϵ, esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\log n \leq n^\epsilon \quad \forall\, n \geq n_\epsilon,$$

si può osservare che

$$\frac{\log n}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2-\epsilon}} \quad \forall\, n \geq n_\epsilon. \tag{1}$$

Ne consegue che, scegliendo ϵ in modo che $3/2 - \epsilon > 1$ (cioè prendendo $\epsilon < 1/2$), allora il secondo membro della (1) è termine generale di una serie convergente, e quindi anche la serie data risulta convergente per il criterio del confronto.

2. Anche questa è una serie a termini positivi. Osservato che, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\log(1+n^n)}{n^{5/2}} \leq \frac{\log(2n^n)}{n^{5/2}} = \frac{\log 2 + \log(n^n)}{n^{5/2}} = \frac{\log 2}{n^{5/2}} + \frac{n\log n}{n^{5/2}} = \frac{\log 2}{n^{5/2}} + \frac{\log n}{n^{3/2}}$$

e che ogni adddendo a secondo membro è termine generale di una serie convergente, allora la serie data converge per il criterio del confronto.