Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 15/02/2011

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$2^{(x^2)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/8$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento. Cominciamo con l'osservare che la funzione che compare a secondo membro è definita su $]0, +\infty[$ e su questo intervallo consideriamo la funzione $f(x) = 2^{(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

mentre

$$f(1) = 1 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 0 e 1, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{1}{2}) = 2^{1/4} - (2)^{1/2} < 0$$

si ha che $x_0 \in]1/2, 1[$. Avendosi poi

$$f(\frac{3}{4}) = 2^{9/16} - \frac{2}{3^{1/2}} > 0 \iff 3^{1/2}2^{9/16} > 2 \iff 3^8 2^9 > 2^{16} \iff 3^8 > 2^7$$

che è vera, allora si ha $x_0 \in]1/2, 3/4[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 5/8$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^4 + 2}{2a_n}. \end{cases}$$

Svolgimento. Osserviamo che la successione è ben definita se e solo se $a_n \neq 0$, e questo è vero poiché si verifica facilmente per induzione che, in effetti, $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Essendo $a_2 = 3/2 > 1 = a_1$ e $a_3 = \frac{3^4+2^5}{2^4 3} > \frac{3}{2}$ congetturiamo che la successione sia crescente. Per dimostrarlo osserviamo che, usando anche il fatto che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{a_n^4 + 2}{2a_n} \geq a_n \iff a_n^4 - 2a_n^2 + 2 \geq 0 \iff (a_n^2 - 1)^2 + 1 \geq 0$$

che è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque la successione è crescente e pertanto ammette limite $\ell \in]3/2, +\infty]$. Passando al limite per $n \to \infty$ nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n^4 + 2}{2a_n},$$

per l'unicità del limite, che

$$\ell = \frac{\ell^4 + 2}{2\ell} \iff (\ell^2 - 1)^2 + 1 = 0$$

che non è soddisfatta da alcun $\ell \in \mathbb{R}$. Allora non può che essere $\ell = +\infty$.

3

Siano $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e (a_n) una successione di elementi di A tale che $\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n = x$. Discutere l'affermazione $x \in A$ nei casi seguenti

$$1)\ A =]0,1[; \qquad 2)\ A =]0,1]; \qquad 3)\ A = [0,1[; \qquad 4)\ A = [0,1].$$

Svolgimento La proposizione è falsa nei casi 1, 2 e 3 e vera nel 4. Un controesempio per i casi 1 e 2 è la successione $a_n = 1/n$ che ha limite 0 ma $0 \notin A$. Un controesempio per 3 è la successione $a_n = 1 - 1/n$ che ha limite 1 ma $1 \notin A$. Nel caso 4 basta osservare che, siccome $0 \leq a_n \leq 1$ allora, per il teorema del confronto, si ha

$$0 \leq \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n \leq 1$$

e quindi $x = \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n \in A$.

4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{2 - 2\cos^2(3x)}{\mathrm{e}^{(9x^2)} - 1}}.$$

Il limite si presenta in forma indeterminata. Osserviamo anzitutto che, per la relazione fondamentale $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{2 - 2\cos^2(3x)}{\mathrm{e}^{(9x^2)} - 1}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{2\frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{\mathrm{e}^{(9x^2)} - 1}}.$$

Ricordando i limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{2\frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{\mathrm{e}^{(9x^2)} - 1}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{2\frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{(3x)^2}\frac{9x^2}{\mathrm{e}^{(9x^2)} - 1}} = \sqrt{2}.$$