Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

prova del 14/6/2001

Analisi 1

A1.1

Dimostrare che l'equazione

$$x^3 = 2^{-\sqrt{x+1}}$$

ha un'unica soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$ e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a 1/4. Giustificare tutti i passaggi senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

L'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$ con

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2^{\sqrt{x+1}}}$$

che è definita sull'intervallo $[-1, +\infty[$, ivi continua e strettamente crescente. Inoltre

$$f(-1) = -2 < 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi il Teorema degli Zeri garantisce l'esistenza di un punto $x_0 \in]-1, +\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ (cioè esiste una soluzione dell'equazione) e l'iniettività di f (conseguenza della stretta monotonia) assicura che x_0 è l'unico zero di f.

Poichè inoltre

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f(1) = 1 - \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$$

e $f(1) > 0$, perchè

$$1 - \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} > 0 \iff 2^{\sqrt{2}} > 1 \iff \sqrt{2} > 0 \text{ (vero)}$$

allora $x_0 \in]0, 1[$.

Poichè $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{\sqrt{3/2}}} < 0$ in quanto

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{\sqrt{3/2}}} < 0 \iff 2^3 > 2^{\sqrt{3/2}} \iff 3 > \sqrt{3/2} \iff 9 > 3/2 \text{ (vero)}$$

allora $x_0 \in]1/2, 1[$ e assumendo 3/4 come valore approssimato per x_0 si ha che l'errore è minore di 1/4.