Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 14/9/2010

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}} = 1-x$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

La funzione che compare a primo membro è definita su $[0,+\infty[$. Ne consegue che non esistono soluzioni negative.

Nell'intervallo $[0,+\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = x-1+\sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{e}^x}}$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. Nell'intervallo considerato la f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = \sqrt{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 0 e 1, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}} > 0$$

infatti

$$-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}} > 0 \iff \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}} > \frac{1}{2} \iff 1-\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} > \frac{1}{4} \iff \frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \iff \mathrm{e} > \frac{16}{9}$$

che è vero in quanto $\mathrm{e} > 2 = 18/9$.

Allora si ha $x_0 \in]0,1/2[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 1/4$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{(1+a_n)^2}{3a_n+2}. \end{cases}$$

Svolgimento

Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 1 > a_2 = \frac{4}{5} > a_3 = \frac{81}{110}.$$

Congetturiamo che la successione sia decrescente.

Osserviamo che si ha

$$a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{(1+a_n)^2}{3a_n+2} \leq a_n \iff a_n^2 \geq 1/2. \tag{1}$$

Dimostriamo per induzione che $a_n \geq 1/\sqrt{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti la proposizione è vera per $n=1$. Supponiamo che sia vera per n e la dimostriamo per $n+1$. Si ha

$$a_{n+1} \geq 1/\sqrt{2} \iff \frac{(1+a_n)^2}{3a_n+2} \geq 1/\sqrt{2} \iff a_n^2 + (2-\frac{3}{\sqrt{2}})a_n + 1 - \sqrt{2} \geq 0$$

e questo è vero, infatti, per ipotesi di induzione

$$a_n^2 + (2-\frac{3}{\sqrt{2}})a_n + 1 - \sqrt{2} \geq \frac{1}{2} + (2-\frac{3}{\sqrt{2}})\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2} \geq 0$$

Per la (1) si ha allora anche che la successione è decrescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{81}{110}].$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = \frac{(1+a_n)^2}{3a_n+2}$ si ottiene, per l'unicità del limite, che L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{(1+L)^2}{3L+2} \iff L = \pm\sqrt{2}.$$

Ne consegue che $L = \sqrt{2}$.

3

Servendosi del teorema del confronto, calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{1+[x]}$$

dove $[x] := \sup\{p \in \mathbb{Z} \ : \ p \leq x\}$.

Svolgimento

Poiché

$$x - 1 \leq [x] \leq x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui

$$x \leq 1 + [x] \leq 1 + x \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{1+[x]} \geq \frac{1}{1+x} \ \forall x > 0$$

allora si ha

$$\frac{x-1}{1+x} \leq \frac{[x]}{1+[x]} \leq 1$$

e quindi passando al limite per $x \to +\infty$, per il teorema dei carabinieri, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{1+[x]} = 1.$$

Ancora più semplicemente sarebbe stato calcolare il limite del reciproco

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+[x]}{[x]} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{[x]}).$$