Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 14/02/2012

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$x = 2 \operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{2+x^2}\big)$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Cominciamo con l'osservare che la funzione che compare a secondo membro è positiva in quanto $0 < \frac{\pi}{2+x^2} \le \frac{\pi}{}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne consegue che non esistono soluzioni in $]-\infty, 0]$.

In $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = x - 2\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{2+x^2}\big)x$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(1) = 1 - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3} < 0$$

mentre

$$f(2) = 2 - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2 - 1 = 1 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{4}{17}\pi > \frac{3}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0$$

infatti quest'ultima equivale a $\frac{9}{4} > 2$ che è vero in quanto $9 > 8$.

Allora si ha $x_0 \in]1, 3/2[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 5/4$. In effetti la soluzione esatta è $x_0 = \sqrt{2}$ (sostituire per credere).

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{n-1}{2n+1}a_n^2 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Anzitutto, per definizione, si ha $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osservato che $a_2 = \frac{1}{2}$ e $a_3 = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} > a_2$ congetturiamo che la successione sia crescente per ogni $n \ge 2$ e lo dimostriamo per induzione. Supponendo infatti che $a_n \le a_{n+1}$, si ha anche $a_{n+1}^2 \ge a_n^2$ dato che $a_n \ge 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha quindi

$$a_{n+2} = \frac{n}{2n+3} a_{n+1}^2 + \frac{1}{2} \ge \frac{n-1}{2n+1} a_n^2 + \frac{1}{2} = a_{n+1}$$

perché si verifica facilmente che $\frac{n}{2n+3} \ge \frac{n-1}{2n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Poiché la successione è crescente, per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in]0, +\infty].$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = \frac{n-1}{2n+1} a_n^2 + \frac{1}{2}$ si ottiene, per l'unicità del limite, che L deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{1}{2} L^2 + \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad L = 1,$$

oppure $L = +\infty$. Per induzione è poi facile dimostrare che $a_n \le 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ da cui segue che $L = 1$.

3

Sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, dimostrare che

1. per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste una successione (x_n) di numeri razionali convergente ad x;
2. se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue e tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$ allora $f = g$.

Svolgimento

1. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in]x - 1/n, x + 1/n[$. Per confronto si ha $x_n \to x$.

2. Sia $x \in \mathbb{R}$. Per la *1.* si ha che esiste $x_n \in \mathbb{Q}$ tale che $x_n \to x$. Siccome $x_n \in \mathbb{Q}$ si ha $f(x_n) = g(x_n)$ e la tesi segue dunque passando al limite per $n \to +\infty$ e utilizzando la continuità di f.

4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

Svolgimento Si ha

$$\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{1-\cos x} \log(1+\operatorname{sen}^2 x)}.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{1-\cos x} \log(1 + \operatorname{sen}^2 x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2/2} \frac{x^2/2}{1-\cos x} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\log}(1 + \operatorname{sen}^2 x) = 2,$$

e quindi, per continuità dell'esponenziale si ha

$$\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{1-\cos x}} = \mathrm{e}^2.$$