Analisi 1

Corso di Laurea in Matematica
prova del 12/02/2013

- È possibile sostenere al più due prove.
- Tempo a disposizione:
  - 1 ora e mezza se si vuole sostenere una sola prova,
  - 3 ore se si vogliono sostenere due prove,

  Alla fine di ogni prova, dopo aver consegnato, si potrà ritirare il testo della prova successiva.
- Scrivere il nome su ogni foglio, includerli in questo e consegnare il tutto.

Cognome	Nome
numero di fogli inclusi	N. Matricola

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\sqrt[7]{x+1} = 3 - x$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

In $\mathbb{R}$ consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt[7]{x+1} + x - 3$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(1) = \sqrt[7]{2} - 2 < 2 - 2 = 0$$

mentre

$$f(2) = \sqrt[7]{3} - 1 > 1 - 1 = 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \sqrt[7]{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2} < 0$$

infatti quest'ultima equivale a $5 \cdot 2^6 < 3^7$ che è vera in quanto

$$5 \cdot 2^6 < 6 \cdot 2^6 = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 2^3 \cdot 2^4 < 3 \cdot 3^2 \cdot 2^4 < 3^7.$$

Allora si ha $x_0 \in]3/2, 2[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 7/4$.

2

Studiare il comportamento al limite delle successioni (a_n) e (b_n) definite per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n^2}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = \alpha \in \mathbb{R}, \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{2}. \end{cases}$$

Svolgimento

Anzitutto, per definizione di (a_n) e per il principio di induzione, si ha $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osservato che $a_2 = \frac{5}{4} > 1 = a_1$, congetturiamo che la successione sia crescente. Per dimostrarlo osserviamo che

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq 1 + \frac{a_n^2}{4} \iff (a_n - 2)^2 \geq 0$$

che è vero per ogni n.

Poiché la successione è crescente, per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in]1, +\infty].$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ad ambo i membri dell'uguaglianza $a_{n+1} = 1 + \dfrac{a_n^2}{4}$ si ottiene $\ell = 1 + \frac{\ell^2}{4}$ che è soddisfatta se e solo se $\ell = 2$ o $\ell = +\infty$. Poiché si dimostra facilmente per induzione che $a_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ allora $\ell = 2$.

Esaminando i primi termini della successione (b_n) ci si accorge che

$$b_n = \frac{\alpha^{2^{n-1}}}{2^{2(n-1)-1}} = \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{2^{n-1}} \cdot 2 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

formula che si dimostra facilmente per induzione. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} 2 & \text{se } |\alpha| = 2, \\ 0 & \text{se } |\alpha| < 2, \\ +\infty & \text{se } |\alpha| > 2. \end{cases}$$

3

Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che se n^2 è divisibile per 3 allora n è divisibile per 3.

Svolgimento

Supponiamo per assurdo che n non sia divisibile per 3. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$n = 3k + r$$

con $r = 1$ oppure $r = 2$. Se $r = 1$ allora $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k^2 + 1$ non è divisibile per 3, e analogamente se $r = 2$. Ne consegue che n^2 non è divisibile per 3 contro l'ipotesi.