Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 10/12/2003

Analisi 1

1

Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Dimostrare che X non può avere più di un minimo.

Svolgimento

Supponiamo che x_1 e x_2 siano due minimi di X. Per definizione allora $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ e

$$x_1 \leq x \; \forall x \in X \quad \text{e} \quad x_2 \leq x \; \forall x \in X.$$

In particolare si ha

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{e} \quad x_2 \leq x_1$$

da cui, per la proprietà antisimmetrica segue che $x_1 = x_2$, e quindi l'unicità del minimo.

2

Provare che l'equazione $5^{1/x} = \sqrt{x}$ ammette un'unica soluzione reale e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Osserviamo che, posto $f(x) = 5^{1/x} - \sqrt{x}$ l'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$. Osserviamo inoltre che f è una funzione strettamente decrescente e continua in $]0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e decrescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]0, +\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f, è anche unico. Per calcolarne un valore approssimato applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi

$$f(2) = \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0$$

mentre

$$f(3) = \sqrt[3]{5} - \sqrt{3} < 0,$$

infatti

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt{3} \iff 5^2 < 3^3 \iff 25 < 27,$$

allora $x_0 \in]2,3[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $5/2$ e si ha poi

$$f(\frac{5}{2}) = 5^{2/5} - (5/2)^{1/2} > 0$$

Infatti,

$$5^{2/5} > \tfrac{5^{1/2}}{2^{1/2}} \iff 2^{1/2}5^{2/5} > 5^{1/2} > 0 \iff 2 \cdot 5^{4/5} > 5$$

$$\iff 2^5 \cdot 5^4 > 5^5 \iff 2^5 > 5 \iff 32 > 5$$

che è vero. Ne consegue che $x_0 \in]5/2, 3[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 11/4$.

3

Studiare il comportamento al limite per $n \to +\infty$ della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1. \end{cases}$$

Svolgimento

Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{4}.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo per induzione. Si ha $a_1 < a_2$. Per ipotesi di induzione supponiamo che $a_n < a_{n+1}$ e proviamo che $a_{n+1} < a_{n+2}$. Infatti, per l'ipotesi di induzione e poiché l'arcotangente è una funzione crescente si ha

$$a_{n+1} = \frac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1 < \frac{1}{\pi} a_{n+1} \operatorname{arctg} n + 1 < \frac{1}{\pi} a_{n+1} \operatorname{arctg}(n+1) + 1 = a_{n+2}.$$

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in]5/4, +\infty[.$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = \frac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1$ si ottiene, per l'unicità del limite che, se L è finito, allora deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L}{2} + 1 \iff L = 2.$$

Ne consegue che $L = +\infty$ oppure $L = 2$. Poichè la successione è crescente, se il limite è 2 allora 2 deve essere un maggiorante. Cerchiamo di dimostrarlo per induzione.

$a_1 \leq 2$ è vero. Supponiamo per ipotesi di induzione che $a_n \leq 2$ e dimostriamo che allora $a_{n+1} \leq 2$. Infatti, si ha

$$a_{n+1} = \frac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1 \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} n + 1 \leq \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} + 1 = 2$$

dove nella prima disuguaglianza è stata usata l'ipotesi di induzione e nella seconda il fatto che $\operatorname{arctg} n \leq \pi/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ne consegue che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 2.$$