Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 09/07/2012

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\cos(\pi x) = \sqrt{x}$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/16, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento Cominciamo con l'osservare che la funzione che compare al secondo membro è definita solo per $x \in [0, +\infty[$ e che per $x \in]1, +\infty[$ si ha $\sqrt{x} > 1$ mentre la funzione a primo membro assume sempre valori ≤ 1. Ne consegue che le eventuali soluzioni dell'equazione devono appartenere all'intervallo $[0, 1]$. In questo intervallo consideriamo la funzione $f(x) = \sqrt{x} - \cos(\pi x)$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(0) = -1 < 0$$

mentre

$$f(1) = 1 - \cos \pi = 2 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 0 e 1, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

allora si ha $x_0 \in]0, 1/2[$ con un errore inferiore a $1/4$. Avendosi

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}} < 0$$

allora si ha $x_0 \in]1/4, 1/2[$ con un errore inferiore a $1/8$. Avendosi

$$f(\frac{3}{8}) = \sqrt{\frac{3}{8}} - \cos\frac{3\pi}{8} > 0,$$

infatti, poiché $\frac{3}{8} > \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ e poiché il coseno è decrescente in $[0, 1]$, allora

$$\cos\frac{3\pi}{8} < \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$f(\frac{3}{8}) > \sqrt{\frac{3}{8}} - \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{3}{9}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} > 0.$$

Allora si ha $x_0 \in]1/4, 3/8[$ con un errore inferiore a $1/16$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 5/16$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2. \end{cases}$$

Svolgimento Supponiamo che (a_n) sia ben definita (cosa che dimostreremo poi) e osserviamo che $a_2 = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 < (\sqrt{2})^2 = 2 = a_1$. Osserviamo poi che la successione è descrescente se e solo se

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq a_n \quad &\iff \quad \left(2 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 < a_n \quad \iff \quad 2 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} < \sqrt{a_n} \\ &\iff \quad 2\sqrt{a_n} - 1 < (\sqrt{a_n})^2 \quad \iff \quad (\sqrt{a_n} - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

che è ovviamente vero.

Poiché la successione è decrescente, per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in [0, 2].$$

Passando al limite nella definizione di a_{n+1} si ottiene che L deve soddisfare l'equazione

$$L = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right)^2 \quad \iff \quad L = 1.$$

Ne consegue che il limite sarà uguale a 1 purché la successione sia ben definita. Vediamo che lo è dimostrando, per induzione, che $a_n \geq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti $a_1 = 2 \geq 1$. Supponiamo per induzione che $a_n \geq 1$ e dimostrariamo che $a_{n+1} \geq 1$. Si ha infatti $\frac{1}{\sqrt{a_n}} \leq 1$ e quindi

$$a_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2 \geq (2 - 1)^2 = 1.$$

3

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni strettamente decrescenti. Discutere le seguenti affermazioni stabilendo se esse siano vere o false e dimostrando quanto affermato.

1. $f \circ g$ è decrescente;
2. $f \circ g$ è crescente.

Svolgimento

1. è falsa. Controesempio $f(x) = g(x) = -x$. $f \circ g(x) = f(g(x)) = -(-x) = x$.

2. è vera. Siano x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$. Poiché g è decrescente si ha $g(x_1) > g(x_2)$ e, poiché f è decrescente,

$$f \circ g(x_2) = f(g(x_2)) > f(g(x_1)) = f \circ g(x_1).$$

4

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan\sqrt{|x|-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Svolgimento Il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$. Poiché in un intorno di $x = 1$ si ha $|x| = x$ allora si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan\sqrt{|x|-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$$

e, con il cambiamento di variabile $y = x - 1$, si ha poi

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} = \lim_{y\to 0} \frac{\arctan\sqrt{y}}{\sqrt{y}\sqrt{y+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$