Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 9/1/2003

Analisi 1

1

Sia (a_n) una successione di numeri reali. Dimostrare che

$$(a_n) \text{ divergente } \implies (a_n) \text{ non limitata.}$$

Svolgimento

Ricordiamo che una successione (a_n) è limitata se e solo se esiste una costante $L > 0$ tale che $|a_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque (a_n) è non limitata se e solo se per ogni $L > 0$ esiste $n_L \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{n_L}| > L$; questo è quindi ciò che si deve dimostrare.

Supponiamo, per fissare le idee, che (a_n) diverga a $+\infty$, il caso in cui (a_n) diverga a $-\infty$ essendo del tutto analogo. Allora, per definizione di limite, si ha che

$$\forall\, M > 0\ \exists\, n_M \in \mathbb{N}\ :\ a_n > M\ \forall\, n > n_M$$

preso allora $M = L$ ed $n_L = n_M + 1$ si ottiene che $|a_{n_L}| > L$, e quindi (a_n) non è limitata.

2

Dimostrare che l'equazione $\log_2 x - 3\log_{1/2}(1+x) = 5$ ammette un'unica soluzione e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Considerata la funzione $f(x) = \log_2 x - 3\log_{1/2}(1+x) - 5$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e crescenti, di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Osserviamo, per comodità di calcolo, che $\log_{1/2}(1+x) = -\log_2(1+x)$ (formula del cambiamento di base) e quindi

$$f(x) = \log_2 x + 3\log_2(1+x) - 5.$$

Avendosi $f(1) = 3 - 5 < 0$ e $f(2) = 1 + 3\log_2 3 - 5 = 3\log_2 3 - 4 > 0$ (in quanto $3\log_2 3 > 4 \iff \log_2 3 > 4/3 \iff 3 > 2^{4/3} \iff 3^3 > 2^4 \iff 27 > 16$ che è vero). Ne consegue che $x_0 \in]1, 2[$.

Si ha poi

$$f(\frac{3}{2}) = \log_2 \frac{3}{2} + 3\log_2 \frac{5}{2} - 5 = \log_2 \frac{3 \cdot 5^3}{2^4} - 5 < 0,$$

infatti $\log_2 \frac{3\cdot 5^3}{2^4} < 5 \iff \frac{3\cdot 5^3}{2^4} < 2^5 \iff 3 \cdot 5^3 < 2^9 \iff 375 > 512$ che è vero. Ne consegue che $x_0 \in]3/2, 2[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 7/4$.

3

Calcolare, se esiste, il $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^{\operatorname{sen} x}$.

Svolgimento

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0. Osservato che

$$\big(1 + \frac{1}{x}\big)^{\operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \log \left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

e che

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \log\big(1 + \frac{1}{x}\big) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} x \log\big(1 + \frac{1}{x}\big) = 0$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} x \log\big(1 + \frac{1}{x}\big) = \lim_{y\to +\infty} \frac{\log(1+y)}{y} = 0,$$

allora, per la continuità della funzione esponenziale, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \log \left(1+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

4

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ con legge

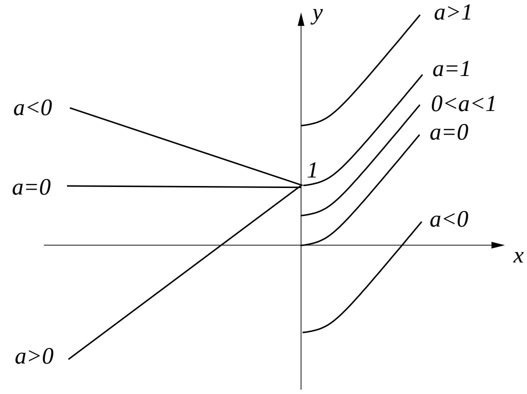
$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax & \text{se } x < 0 \\ a + x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.

1. Dire per quali valori di a la funzione è invertibile e per quali di essi risulta $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2. dire se per $a = 2$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa;
3. determinare per quali valori di a, se ne esistono, la funzione è continua in ogni punto.

Svolgimento

1. Conviene distinguere i casi di figura:



Come si vede, la funzione risulta iniettiva, e quindi invertibile, per ogni $a \geq 1$. Tra questi valori di a, l'unico per cui si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ è $a = 1$.

2. Per $a = 2$ la funzione è invertibile. Per determinare la legge della funzione inversa occorre risolvere le equazioni

$$y = 2 + x^2 \text{ per } x \geq 0$$

e

$$y = 1 + 2x \text{ per } x < 0.$$

Avendosi

$$y = 2+x^2 \text{ per } x \geq 0 \iff x^2 = y - 2 \text{ per } x \geq 0 \text{ e } y-2 \geq 0 \iff x = \sqrt{y-2} \text{ per } y \geq 2$$

e

$$y = 1 + 2x \text{ per } x < 0 \iff x = \frac{y-1}{2} \text{ per } \frac{y-1}{2} < 0 \iff x = \frac{y-1}{2} \text{ per } y < 1$$

allora $f^{-1} :]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ con legge

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2} & \text{se } y < 1 \\ \sqrt{y-2} & \text{se } y \geq 2 \end{cases}$$

3. Per come è definita, la funzione è continua per ogni $x \neq 0$ qualunque sia a. Per decidere per quali valori di a risulta continua anche nel punto $x = 0$ occorre calcolare (se esiste) il $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e confrontarlo con $f(0)$. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (a + x^2) = a$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 + ax) = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$

allora il limite per $x \to 0$ esiste se e solo se $a = 1$ ed è uguale a $1 = f(0)$ e pertanto f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 1$.