Analisi 1

Corso di Laurea in Matematica
prova del 08/07/2013

1 Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$\frac{\mathrm{e}^{-1/x}+1}{x(x^2+1)} = -1$$

e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento Osserviamo che l'equazione è equivalente alla seguente

$$\mathrm{e}^{-1/x}+1 = -x(x^2+1).$$

In $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ consideriamo la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}+x^3+x+1$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. Siccome $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$, basta studiare gli zeri della restrizione di f all'intervallo $(-\infty, 0)$. Osserviamo che, in questo intervallo, f è strettamente crescente. Ne consegue che se uno zero esiste, questo è unico. f è continua e inoltre

$$f(-1) = \mathrm{e}-1 > 0$$

in quanto $\mathrm{e} > 2$, mentre

$$f(-2) = \mathrm{e}^{1/2}-9 < 4^{1/2} - 9 = -7 < 0.$$

Per il teorema degli zeri esiste allora uno zero di f, x_0, tra -1 e -2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(-\frac{3}{2}) = \mathrm{e}^{2/3}-\frac{31}{8} < 3 - \frac{31}{8} = -\frac{7}{8} < 0$$

Allora si ha $x_0 \in (-3/2, -1)$ e un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq -5/4$.

2 Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha, \\ a_{n+1} = n\log(1+\frac{1}{2n})a_n, \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento Poiché l'argomento del logaritmo è sempre positivo, la successione è ben definita.

Si vede subito che se $\alpha = 0$ allora $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo, poi, che se $\alpha > 0$ allora

$$a_2 = \log(1+\frac{1}{2})\alpha < \alpha = a_1$$

e

$$a_3 = 2\log(1+\frac{1}{4})a_2 = \log(1+\frac{1}{4})^2 a_2 = \log\frac{25}{16}a_2 < \log \mathrm{e}\, a_2 = a_2.$$

Viceversa, se $\alpha < 0$ risulta $a_2 > a_1$ e $a_3 > a_2$.

Congetturiamo dunque che la successione sia decrescente se $\alpha > 0$ e crescente se $\alpha < 0$.

Consideriamo il caso $\alpha > 0$, l'altro essendo del tutto analogo.

Anzitutto è facile provare per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha poi, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} < a_n \iff n \log(1 + \frac{1}{2n}) a_n < a_n \iff \frac{1}{2} \log(1 + \frac{1}{2n})^{2n} < 1$$

in quanto

$$(1 + \frac{1}{2n})^{2n} < \mathrm{e} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dunque la successione è monotona decrescente. Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in [0, \alpha].$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ ambo i membri dell'uguaglianza $a_{n+1} = n \log(1 + \frac{1}{2n}) a_n$ si ottiene $\ell = \frac{1}{2}\ell$, cioè $\ell = 0$.

Se $\alpha < 0$ si ha invece che la successione è crescente e assume sempre valori negativi, quindi

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in [\alpha, 0].$$

e quindi, procedendo come prima si ottiene di nuovo che $\ell = 0$.

3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A' \neq \varnothing$ e siano $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in A'$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Dimostrare o confutare la seguente proposizione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0.$$

Svolgimento La proposizione è vera. Infatti, per definizione di limite, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

La stessa cosa si ottiene applicando la definizione di limite a $\lim_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0$.

4 Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \cos(x - 2 - \pi)}{x^2 - 4x + 4}.$$

Svolgimento Il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$.

Col cambiamento di variabile $x = y + 2$ si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + \cos(x - 2 - \pi)}{x^2 - 4x + 4} &= \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{y^2 + 1} + \cos(y - \pi)}{y^2} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{y^2 + 1} - \cos y}{y^2} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{y^2 + 1 - \cos^2 y}{y^2(\sqrt{y^2 + 1} + \cos y)} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{y^2 + \operatorname{sen}^2 y}{y^2(\sqrt{y^2 + 1} + \cos y)} \\
&= \lim_{y \to 0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1} + \cos y}(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y^2}) = \frac{1}{2} 2 = 1
\end{aligned}$$