Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 5/7/2010

Analisi 1

1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione $\operatorname{arctg} x^2 = 2 - x$ e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento. Le funzioni che compaiono nell'equazione sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Per ogni $x < 0$ si ha $\operatorname{arctg} x^2 < \pi/2$ e $2 - x > 2$, e quindi $2 - x > \operatorname{arctg} x^2$. Ne consegue che non esistono soluzioni negative.

Nell'intervallo $[0, +\infty[$ consideriamo la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x^2 + x - 2$ e osserviamo che sono soluzioni dell'equazione tutti e soli gli zeri di f. Nell'intervallo considerato la f è continua e strettamente crescente e vi potrà quindi essere al più uno zero. Inoltre

$$f(1) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0, \;\; f(2) = \operatorname{arctg} 4 > 0.$$

Per il teorema degli zeri allora esiste uno zero di f, x_0, tra 1 e 2, che è anche unico per quanto osservato in precedenza. Avendosi

$$f(\frac{3}{2}) = \operatorname{arctg} \frac{9}{4} - \frac{1}{2} > \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2} = \frac{pi}{4} - \frac{1}{2} > 0$$

allora si ha $x_0 \in]1, 3/2[$. Un valore approssimato di x_0 con l'approssimazione voluta è quindi $x_0 \simeq 5/4$.

2

Studiare il comportamento al limite della successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{na_n + 1}{n+1}, \end{cases}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Si ha $a_2 = \frac{\alpha+1}{2}$, $a_3 = \frac{\alpha+2}{3}$, $a_4 = \frac{\alpha+3}{4}$.

Si dimostra per induzione che

$$a_n = \frac{\alpha + n - 1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha + n - 1}{n} = 1 \; \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3

Sia I un intorno di 0. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Sia poi $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ il termine generale di una successione di funzioni definite per induzione nel modo seguente

$$\begin{cases} f^{(1)} := f \\ f^{(n)} := f^{(n-1)} \circ f. \end{cases}$$

1. Dimostrare che
$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 1 \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

2. Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\log(1+\log(1+x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))}.$$

Svolgimento. 1. Lo dimostriamo per induzione. È vero per $n = 1$. Supposto vero per n si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n+1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(f(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

2. Posto $g(x) = \log(1+x)$ e $f(x) = \operatorname{sen} x$, per quanto provato prima si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\log(1+\log(1+x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))))} = \lim_{x\to 0} \frac{g^{(3)}(x)}{f^{(5)}x} = \lim_{x\to 0} \frac{g^{(3)}(x)}{x} \cdot \frac{x}{f^{(5)}x} = 1 \cdot 1 = 1.$$