**Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

Corso di Laurea in Matematica - prova del 5/1/2005

# Analisi 1

## 1

Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione

$$(y^2-1)^3 = 2^{-|y|}$$

e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore ad 1/4, senza fare uso del calcolatore.

### Svolgimento

Osserviamo che posto $f(y) = 2^{-|y|} - (y^2-1)^3$ l'equazione data è equivalente all'equazione $f(y) = 0$. La funzione $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è pari; si verifica infatti facilmente che $f(y) = f(-y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Possiamo quindi limitarci a studiare l'equazione in $[0, +\infty[$ osservando che se $y_0$ è una soluzione, allora lo è anche $-y_0$.

Osserviamo inoltre che $f$ è una funzione strettamente decrescente e continua in $[0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e decrescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(0) = 2 > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to +\infty} f(y) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $y_0 \in ]0, +\infty[$ tale che $f(y_0) = 0$ che, per l'iniettività di $f$ (conseguenza della stretta monotonia) è anche unico. Ne consegue che l'equazione data ha esattamente due soluzioni. Per calcolarne un valore approssimato osserviamo che

$$f(1) = \frac{1}{2} > 0 \;\; \text{mentre} \;\; f(2) = \frac{1}{4} - 27 < 0,$$

allora $y_0 \in ]1, 2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/2$ e l'errore che si commetterebbe approssimando $y_0$ con questo valore sarebbe inferiore a $1/2$, che è maggiore di $1/4$. Dobbiamo quindi procedere con la bisezione dell'intervallo. Si ha

$$f(\frac{3}{2}) = 2^{-3/2} - (\frac{5}{4})^3 < 0.$$

Infatti, $2^{-3/2} - (\frac{5}{4})^3 < 0 \iff \frac{1}{2^{3/2}} < \frac{5^3}{2^6} \iff \frac{1}{2^3} < \frac{5^6}{2^{12}} \iff 2^9 < 5^6$, che è vero in quanto $5^6 > 4^6 = 2^{12} > 2^9$. Ne consegue che $y_0 \in ]1, 3/2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $5/4$ e l'errore che si commette approssimando $y_0$ con questo valore è inferiore a $1/4$. Pertanto un valore di $y_0$ con l'approssimazione richiesta è $y_0 \simeq 5/4$. Un'approssimazione della soluzione $-y_0$, con la medesima accuratezza, è $-5/4$.

## 2

Posto

$$\begin{cases} a_1 = 3/4 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{2a_n^2 - 2a_n + 1}, \end{cases} \tag{1}$$

1. dimostrare che la legge (1) definisce una successione $(a_n)$ di numeri reali;
2. dimostrare che $1/2 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
3. studiare il comportamento al limite, per $n \to \infty$, della successione $(a_n)$.

**Svolgimento**

1. Affinchè $a_n$ sia definito occorre che $2a_n^2 - 2a_n + 1 \neq 0$. D'altra parte ciò è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$, in quanto l'equazione di secondo grado $2x^2 - 2x + 1 = 0$ non ha alcuna soluzione reale.

2. $1/2 \leq a_1 = 3/4 \leq 1$ è vero. Supponiamo, per ipotesi di induzione, che $1/2 \leq a_n \leq 1$ e proviamo che $1/2 \leq a_{n+1} \leq 1$, cioè che

$$1/2 \leq \frac{a_n^2}{2a_n^2 - 2a_n + 1} \leq 1.$$

Moltiplicando per $2a_n^2 - 2a_n + 1$ che è strettamente positivo, la doppia disuguaglianza equivale al seguente sistema di disguguaglianze

$$\begin{cases} 2a_n^2 - 2a_n + 1 \leq 2a_n^2 \\ a_n^2 \leq 2a_n^2 - 2a_n + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1/2 \leq a_n \\ 0 \leq a_n^2 - 2a_n + 1, \end{cases}$$

evidentemente soddisfatto.

3. Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 3/4, \quad a_2 = \frac{9}{10} > a_1, \quad a_3 = \frac{81}{82} > a_2.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo. Si ha

$$a_n \leq a_{n+1} \iff a_n \leq \frac{a_n^2}{2a_n^2 - 2a_n + 1}.$$

Dividendo per $a_n$ poi moltiplicando per $2a_n^2 - 2a_n + 1$ che sono entrambi strettamente positivi si ottengono le disuguaglianze equivalenti

$$1 \leq \frac{a_n}{2a_n^2 - 2a_n + 1} \iff 2a_n^2 - 2a_n + 1 \leq a_n \iff 2a_n^2 - 3a_n + 1 \leq 0 \iff \frac{1}{2} \leq a_n \leq 1.$$

Poiché l'ultima disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, ne consegue che per tali $n$ si ha $a_n \leq a_{n+1}$, e quindi $(a_n)$ è crescente.

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L \in [\frac{3}{4}, 1].$$

Passando al limite nell'uguaglianza $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{2a_n^2 - 2a_n + 1}$ si ottiene, per l'unicità del limite, che $L$ deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L^2}{2L^2 - 2L + 1}.$$

Dividendo per $L > 0$, moltiplicando per $2L^2 - 2L + 1 > 0$ e risolvendo, si ha che quest'ultima equazione ammette le soluzioni $L = 1/2$ e $L = 1$. Non potendo essere $L = 1/2$ ne consegue che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

## 3

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos[2\log(1+x)] - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$

**Svolgimento**

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Osservato che

$$\frac{\cos[2\log(1+x)] - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\cos[2\log(1+x)] - 1}{2^2 \log^2(1+x)} 2^2 \frac{\log^2(1+x)}{x^2} \frac{x^2}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos[2\log(1+x)]-1}{[2\log(1+x)]^2} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^2 = 1^2 = 1, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\right) = 1^2 = 1,$$

allora si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos[2\log(1+x)]-1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = -\frac{1}{2} 2^2 = -2\,.$$