Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 4/9/2003

Analisi 1

1

1. Scrivere la definizione di limite

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, precisando quali ipotesi vanno fatte sul dominio $A \subseteq \mathbb{R}$.

2. Verificare, in base alla definizione, che $\lim_{x \to -\infty} (x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x) = +\infty$.

Svolgimento

A deve essere non limitato inferiormente e

$$\forall M > 0 \; \exists x_M \in \mathbb{R} \; : \; f(x) > M \; \forall x \in A \; : \; x < x_M.$$

Fissato $M > 0$ dobbiamo dunque trovare un $x_M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x < x_M$. A tal scopo osserviamo che la disuguaglianza

$$f(x) > M \iff x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x > M$$

è soddisfatta se $x^2 - 2 > M$, in quanto seno e coseno hanno valori in $[-1, 1]$. Poiché d'altra parte

$$x^2 - 2 > M \iff x^2 > M + 2 \Leftarrow x < -\sqrt{M+2}$$

allora la definizione di limite è soddisfatta prendendo $x_M = -\sqrt{M+2}$.

2

Provare che l'equazione $x(1 - 2^{-x}) = 1 - \sqrt{x}$ ammette un'unica soluzione reale e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/8$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Osserviamo che, posto $f(x) = x(1 - 2^{-x}) + \sqrt{x} - 1$ l'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$. Osserviamo inoltre che f è una funzione strettamente crescente e continua in $[0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e crescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1/2$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]0, 1[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f, è anche unico. Per calcolarne un valore approssimato applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi $f(1/2) = (1 - \sqrt{2})/(2\sqrt{2}) < 0$ allora $x_0 \in]1/2, 1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/4$ e si ha poi

$$f(\frac{3}{4}) = \frac{2\sqrt{3}2^{3/4} - 2^{3/4} - 3}{4 \cdot 2^{3/4}} > 0$$

Infatti, poiché il denominatore è positivo la disuguaglianza equivale a

$$2\sqrt{3}2^{3/4} - 2^{3/4} - 3 > 0 \iff 2^{3/4}(2\sqrt{3} - 1) > 3 \iff 2^3(2\sqrt{3} - 1)^4 > 3^4$$

che è vero, in quanto essendo $\sqrt{3} > 3/2$ allora

$$2^3(2\sqrt{3} - 1)^4 > 2^3(3 - 1)^4 = 2^7 = 128 > 3^4 = 81$$

Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 3/4[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 5/8$.

3

Data la successione (a_n) definita per induzione da

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-n})a_n^2, \end{cases}$$

1. determinare un maggiorante di (a_n);
2. studiarne l'andamento di monotonia;
3. studiarne il comportamento al limite per $n \to \infty$.

Svolgimento

Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} < a_1, \quad a_3 = (1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3})(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2})^2 < a_2.$$

Congetturiamo quindi che la successione sia decrescente e che 1 sia un maggiorante. Lo dimostriamo per induzione.

1. Per dimostrare che 1 è un maggiorante osserviamo che $a_1 \leq 1$ e supponiamo per ipotesi induzione che $a_n \leq 1$. Allora si ha $a_{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-n})a_n^2 < a_n^2 \leq a_n$ e quindi, per induzione, $a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Proviamo ora che la successione è decrescente. Per ciò basta osservare che dal momento che $a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $a_{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-n})a_n^2 < a_n^2 \leq a_n$ che significa appunto che la successione è decrescente.
3. Essendo monotona la successione ammette limite λ e, dal momento che è anche non negativa, questo limite è finito, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $n \to \infty$ nell'equazione $a_{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-n})a_n^2$ si ottiene che λ deve soddisfare l'equazione $\lambda = \lambda^2$, soddisfatta da $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. Poichè $\lambda = 1$ non può essere il limite (in quanto $a_n \leq a_2 < 1$ per ogni $n \geq 2$) ne consegue che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$