Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 3/7/2003

Analisi 1

1

Siano A e B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to B$ una funzione invertibile. Dimostrare che

a. se f è crescente allora f^{-1} è crescente;

b. se f è decrescente allora f^{-1} è decrescente.

Svolgimento

a. Ricordiamo che f è crescente se e solo se

$$a_1, a_2 \in A,\ a_1 < a_2 \quad \Longrightarrow \quad f(a_1) \leq f(a_2).$$

Siano $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 > b_2$. Se, per assurdo, risultasse $f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2)$ allora, poiché f è crescente, si avrebbe

$$f(f^{-1}(b_1)) \leq f(f^{-1}(b_2)) \quad \Longleftrightarrow \quad b_1 \leq b_2$$

contro il fatto che $b_1 > b_2$.

b. Del tutto analogo al punto precedente.

2

Per ogni $\varepsilon > 0$ si consideri la funzione $f_\varepsilon :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\varepsilon(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\varepsilon t}} - \varepsilon t^2.$$

a. Provare che l'equazione $f_\varepsilon(t) = 0$ ammette un'unica soluzione reale positiva $t(\varepsilon)$.

b. Per $\varepsilon = 1$, determinare un valore approssimato della soluzione $t(1)$ con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore;

c. Determinare per quali $\varepsilon > 0$ risulta

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq t(\varepsilon)$$

e calcolare il limite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} t(\varepsilon)$.

Svolgimento

a. Osserviamo che f_ε è una funzione strettamente decrescente e continua in $]0,+\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e strettamente decrescenti. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto esiste un punto $t(\varepsilon)$ tale che $f_\varepsilon(t(\varepsilon)) = 0$ che, per l'iniettività di f_ε, è anche unico.
b. Applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi $f_1(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$ e $f(2) = \mathrm{e}^{1/2} - 4 < 0$ (in quanto $\mathrm{e} < 16$). Ne consegue che $t(1) \in]1,2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/2$ e si ha poi

$$f_1(\frac{3}{2}) = \mathrm{e}^{2/3} - \frac{9}{4} < 0.$$

Infatti

$$\mathrm{e}^2 < (\frac{9}{4})^3 \iff \mathrm{e}^2 < \frac{769}{64} \iff \mathrm{e}^2 < \frac{769}{64}$$

che è vero, in quanto

$$\mathrm{e}^2 < 9 \ \text{ e } \ 9 < \frac{769}{64} \ (\text{ giacché } 64 \cdot 9 = 576 < 769).$$

Ne consegue che $t(1) \in]1, 3/2[$ e pertanto un valore di $t(1)$ con l'approssimazione richiesta è $t(1) \simeq 5/4$.
c. Osservato che

$$f_\varepsilon(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1 \geq 0 \ \text{ per ogni } \varepsilon > 0,$$

che $f_\varepsilon(t(\varepsilon)) = 0$ e che f_ε è decrescente, ne consegue che

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq t(\varepsilon) \ \text{ per ogni } \varepsilon > 0.$$

Per confronto si ha che $\lim_{\varepsilon\to 0} t(\varepsilon) = 0$.

3

Calcolare, qualora esistano, i seguenti limiti:

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{2+x^2}}{x^{-3/2}}$;

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+\mathrm{e}^n)^{\frac{(-1)^n}{n}}$.

Svolgimento

a. Il limite del numeratore si presenta in forma indeterminata $\infty - \infty$. Osservato che, per ogni $x > 0$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} - \sqrt[4]{2+x^2} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[4]{2+x^2})(\sqrt{x} + \sqrt[4]{2+x^2})}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{2+x^2}} \\
&= \frac{x - \sqrt[2]{2+x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{2+x^2}} = \frac{(x - \sqrt{2+x^2})(x + \sqrt{2+x^2})}{(\sqrt{x} + \sqrt[4]{2+x^2})(x + \sqrt{2+x^2})} \\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x} + \sqrt[4]{2+x^2})(x + \sqrt{2+x^2})}
\end{aligned}
$$

allora si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{2+x^2}}{x^{-3/2}} &= \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{-2}{(\sqrt{x} + \sqrt[4]{2+x^2})(x + \sqrt{2+x^2})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{-2}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{\frac{2}{x^2}+1})x(1 + \sqrt{\frac{2}{x^2}+1})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{(1 + \sqrt[4]{\frac{2}{x^2}+1})(1 + \sqrt{\frac{2}{x^2}+1})} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

b. Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo ∞^0. Cominciamo con l'osservare che

$$
a_n := (1+\mathrm{e}^n)^{\frac{(-1)^n}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n}\log(1+\mathrm{e}^n)}.
$$

Poiché

$$
1 = \frac{\log(\mathrm{e}^n)}{n} \le \frac{\log(1+\mathrm{e}^n)}{n} \le \frac{\log(2\,\mathrm{e}^n)}{n} \le \frac{n+\log 2}{n} \to 1
$$

allora, per il criterio del confronto,

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+\mathrm{e}^n)}{n} = 1,
$$

e quindi $a_{2n} \to \mathrm{e}$, mentre $a_{2n+1} \to 1/\,\mathrm{e}$, quindi il limite non esiste.