Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica - prova del 1/7/2002

Analisi 1

1

Dimostrare che l'equazione

$$6^x = \frac{3}{2^x} - 5$$

ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $\frac{1}{4}$, senza fare uso del calcolatore.

Svolgimento

Posto $f(x) = 6^x - \frac{3}{2^x} + 5$ l'equazione si può scrivere nella forma $f(x) = 0$ le cui soluzioni sono tutti e soli gli zeri di f. Poichè f è strettamente crescente (come somma di funzioni crescenti di cui una strettamente) allora esiste al più uno zero.

Essendo $f(0) = 3 > 0$ e $f(-1) = -5/6 < 0$ allora per il teorema degli zeri esiste uno zero di f (unico per quanto osservato prima) in $]-1, 0[$.

Per calcolarne un valore approssimato con l'accuratezza desiderata applichiamo il metodo di bisezione. Consideriamo dunque

$$f(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{6}} - 3\sqrt{2} + 5$$

e proviamo che è strettamente positivo. Infatti

$$f(-1/2) > 0 \iff 5 > 3\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$

e, osservato che il secondo membro è positivo, possiamo elevare tutto al quadrato ottenendo la disuguaglianza equivalente

$$25 > 18 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \iff \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{41}{6} > 0$$

che è vera. Dunque, detto x_0 la soluzione dell'equazione, si ha $x_0 \in]-1, -1/2[$, e pertanto un valore approssimato a meno di $1/4$ è $x_0 \simeq -3/4$.

2

Determinare il carattere delle serie

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$;

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^{\log n}}$, sapendo che la funzione $f(x) = \frac{x}{(\log x)^{\log x}}$ è strettamente decrescente nell'intervallo $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Svolgimento

1. La serie è a termini positivi. Poichè

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\log n)^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\log n} = 0$$

allora la serie converge per il criterio della radice.

2. La serie è a termini positivi e il termine generale è una successione decrescente Per il criterio di condensazione la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(n \log 2)^{n \log 2}}$$

che converge per il criterio della radice.