Università degli Studi di Udine

Paolo Baiti, Lorenzo Freddi

Dispense del corso di

ANALISI MATEMATICA I
Parte prima

tenuto presso la facoltà di Scienze

corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2009-2010

Indice

Capitolo 1

Il linguaggio della matematica

Concetti primitivi, proposizioni, assiomi

La matematica è costituita in gran parte dalle *proposizioni* del linguaggio comune. Queste ultime tuttavia sono soggette ad ambiguità, che devono essere evitate nel linguaggio matematico, che necessita di frasi ben chiare in cui ogni parola che viene usata deve avere un significato ben preciso (cioè essere stata definita prima). Sono da escludere ad esempio frasi del tipo "I pentagoni sono più belli degli esagoni.

Nella definizione di ogni singola parola o idea si è costretti ad usare termini che necessitano anch'essi di definizione: ad esempio, una "casa" potrebbe essere definita come un edificio utilizzato ad abitazione. Ma ora rimane da definire cosa vogliano dire "edificio" ed "abitazione". L'"edificio" è una costruzione generalmente fatta di malta, cemento, mattoni, ecc. Ma ora bisogna definire cosa siano "costruzione", "malta", "cemento" e "mattoni". E così via in un processo senza fine. Da ciò appare chiaro che da qualche parte bisogna partire, scegliere le basi sulle quali costruire tutto il resto. In matematica queste sono date dai *concetti primitivi* e dagli *assiomi.* I primi sono gli elementi fondamentali sulla cui definizione, spesso di natura intuitiva, tutti concordano; i secondi sono degli enunciati sulla cui veridicità si è largamente concordi. Sono famosi, per esempio, gli assiomi di Euclide in geometria, le idee intuitive di punto e retta insieme ad alcune proprietà di base da loro possedute.

In generale la matematica è basata sulle *proposizioni* ovvero delle frasi (concetto primitivo) alle quali si possa dare un valore di verità ben definito.

Esse saranno dunque vere (V) oppure false (F).

Definizione 1.1 *Le* proposizioni *sono frasi per le quali ha senso chiedersi se siano vere o false ma non contemporaneamente vere e false.*

Per esempio la frase “i maiali sono animali” è una proposizione in quanto è una frase a cui si può dare un valore di verità (in questo caso V perché è vera). Allo stesso modo “i maiali sono delle piante” è ancora una proposizione, stavolta falsa (F). Anche la seguente frase è una proposizione: “1649861573087 è un numero primo”. Sebbene non sia immediato saperlo, tale numero sicuramente è oppure non è primo; la frase non può che essere vera oppure falsa anche se a priori non sappiamo quale dei due valori di verità attribuirle. Non è invece una proposizione la frase “la matematica fa schifo” perché l'amore o il disamore per la matematica è soggettivo e quindi l'asserzione non ha un valore di verità ben definito.

Altri esempi:

- la Terra gira intorno al sole (vera)
- la Terra è piatta (falsa)
- dove stai andando? (non è una proposizione, perché non ha senso chiedersi se sia vera o falsa)
- io sto mentendo (non è una proposizione, perché è contemporaneamente vera e falsa).

Mentre le proposizioni possono essere vere o false, gli assiomi sono delle proposizioni vere a priori.

Connettivi logici, teoremi

Le proposizioni possono essere unite tra loro per formarne altre più complesse, i *teoremi*, più o meno come si utilizzano i mattoni per costruire una casa. Per far ciò si usano i *connettivi logici*

Connettivo	*Simboli*	*Inglese*	
e	$\wedge$,	and	congiunzione
o, oppure	$\vee$	or	disgiunzione debole
non	$\neg$	not	negazione
implica	$\Rightarrow$		implicazione

Essi servono a costruire proposizioni *composte*. Ad esempio:
$P =$ “andiamo al mare”, $Q =$ “andiamo in montagna”.
P e $Q =$ “andiamo al mare e in montagna” (entrambi),
P o $Q =$ “andiamo al mare o in montagna” (almeno una delle due),
non $P =$ “non andiamo al mare”.

Tabelle di verità

I connettivi sono definiti dalla propria tabella di verità, cioè dai valori di verità che assumono le proposizioni che ne fanno uso. Più precisamente, siano P e Q due proposizioni; le seguenti tabelle riportano i valori di verità di non P, $P \,\mathrm{e}\, Q$, $P \,\mathrm{o}\, Q$, $P \Rightarrow Q$ in funzione dei valori di verità di P e di Q.

P	non P
V	F
F	V

P	Q	$P \,\mathrm{e}\, Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	$P \,\mathrm{o}\, Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Si possono riassumere dicendo che $P \,\mathrm{e}\, Q$ è vera soltanto se entrambe le proposizioni P e Q sono vere, $P \,\mathrm{o}\, Q$ è vera quando almeno una delle due è vera; non P ha valori di verità opposti a quelli di P. Infine $P \Rightarrow Q$ è falsa solamente quando P è vera e Q è falsa. Questo è infatti ciò che realmente ci interessa: vietare che da ipotesi vere si possano trarre deduzioni false (in tal caso saremmo dei pessimi investigatori!).

Qualche esempio: siano $P =$ “i maiali sono animali”, $Q =$ “le felci sono piante”. Entrambe le affermazioni sono vere per cui $P \,\mathrm{e}\, Q$ è una proposizione vera e si legge “i maiali sono animali *e* le felci sono piante”.

Se invece $P =$ “$2 > 1$”; $Q =$ “$2 = 1$”, allora la scrittura $2 \geq 1$ può essere scritta come $P \,\mathrm{o}\, Q$ e dunque si legge: “2 è maggiore di 1 o 2 è uguale ad 1”. Secondo le tabelle sopra riportate, $P \,\mathrm{o}\, Q$ è vera se *almeno* una delle due proposizioni è vera. Siccome P è vera e Q è falsa, allora $P \,\mathrm{o}\, Q$ è vera, cioè $2 \geq 1$ è vera.

Sono sinonimi: *P implica Q, P è condizione sufficiente per Q, Q è condizione necessaria per P, se P allora Q, Q se P, P solo se Q.*

Doppia implicazione

Indichiamo con $P \iff Q$ la proposizione

$$(P \Rightarrow Q) \,\mathrm{e}\, (Q \Rightarrow P)$$

che si legge: P *equivale a* Q, o anche Q *se e solo se* P, P *se e solo se* Q, P *è condizione necessaria e sufficiente per* Q, Q *è condizione necessaria e sufficiente per* P.

Esercizio 1.2 *Costruire la tabella di verità di* $P \iff Q$.

In pratica, una proposizione è equivalente ad un'altra se può essere ad essa sostituita lasciando inalterato il significato. Si può verificare l'equivalenza tra due proposizioni composte confrontandone le tabelle di verità; se le tabelle sono uguali allora le proposizioni sono equivalenti, se le tabelle sono diverse allora le proposizioni non sono equivalenti. Ad esempio, sebbene la cosa non appaia evidente, le proposizioni

- se n è divisibile per 4 allora è divisibile per 2
- n non è divisibile per 4 o n è divisibile per 2

sono equivalenti e quindi esprimono lo stesso concetto. Ciò si può verificare mostrando che le proposizioni composte

$$P \Rightarrow Q, \qquad (\text{non}\, P)\, \text{o}\, Q \tag{1.1}$$

hanno la stessa tabella di verità. Conosciamo la tabella di verità di $P \Rightarrow Q$; costruiamo quella di $(\text{non}\, P)\, \text{o}\, Q$.

P	Q	$(\text{non}\, P)\, \text{o}\, Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Poiché le tabelle di verità sono identiche allora le due proposizioni sono equivalenti.

Oltre alla (1.1), altre importanti equivalenze che vengono usate molto spesso sono le seguenti:

1. $P \Rightarrow Q$ equivale a $(\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)$
2. $P\, \text{e}\, Q$ equivale a $\text{non}\big((\text{non}\, P)\, \text{o}\, (\text{non}\, Q)\big)$
3. $P\, \text{o}\, Q$ equivale a $\text{non}\big((\text{non}\, P)\, \text{e}\, (\text{non}\, Q)\big)$

Proviamo la seconda lasciando le altre per esercizio. La tabella di P e Q è nota; costruiamo quella di non$\big((\text{non}\, P) \text{ o } (\text{non}\, Q)\big)$

P	Q	non$\big((\text{non}\, P) \text{ o } (\text{non}\, Q)\big)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Poiché le tabelle di verità sono identiche allora le due proposizioni sono equivalenti. □

Nota: la *2.* e la *3.* mostrano, tra l'altro, che se si volesse fare economia di assiomi si potrebbe introdurre solo uno tra i connettivi "e", "o" e "$\Rightarrow$" e definire gli altri in funzione dell'uno.

Esercizio 1.3 *Sia n un numero intero. Dimostrare che*

$$n \text{ è pari} \iff n^2 \text{ è pari.}$$

Trattandosi di una doppia implicazione, dimostriamo che sono entrambe vere le due proposizioni

1. n è pari $\Rightarrow n^2$ è pari;

2. n^2 è pari $\Rightarrow n$ è pari.

Proviamo la 1. Poichè n è pari, allora esiste un numero intero k tale che $n = 2k$ e quindi $n^2 = 4k^2$. Ne consegue che anche n^2 è divisibile per 2 e quindi è un numero pari.

Proviamo la 2. Osserviamo che non si può usare lo stesso argomento di prima perché dal fatto che n^2 è pari si ha che esiste un numero intero k tale che $n^2 = 2k$, ma, per passare ad n dovremmo estrarre la radice quadrata, cioè $n = \sqrt{2k}$ e questo non ci consente di concludere che n è pari. Proviamo allora a scrivere la proposizione in una forma diversa. Servendoci, per esempio, dell'equivalenza

$$P \Rightarrow Q \quad \text{equivale a} \quad (\text{non}\, Q) \Rightarrow (\text{non}\, P)$$

si ha che la 2. è equivalente a

$$n \text{ è dispari} \Rightarrow n^2 \text{ è dispari}$$

che è vera, in quanto in tal caso esiste un intero k tale che $n = 2k + 1$ e quindi $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ che è dispari.

In alternativa avremmo potuto anche servirci dell'equivalenza

$$P \Rightarrow Q \quad \text{equivale a} \quad (\text{non}\, P)\,\text{o}\, Q.$$

Provare per esercizio.

Esercizio 1.4 *Discutere l'equivalenza delle seguenti proposizioni.*

1. $[P\,\text{e}\,(\text{non}\,Q)]\,\text{o}\,[Q\,\text{e}\,(\text{non}\,P)]$, $\quad (P\,\text{o}\,Q)\,\text{e}\,[\text{non}(P\,\text{e}\,Q)]$;
2. $P \Rightarrow (P\,\text{o}\,Q)$, $\quad P \Rightarrow (P\,\text{e}\,Q)$;
3. $(P\,\text{o}\,Q) \Rightarrow P$, $\quad (P\,\text{e}\,Q) \Rightarrow P$;
4. $(P\,\text{e}\,Q) \Rightarrow R$, $\quad (P \Rightarrow R)\,\text{e}\,(Q \Rightarrow R)$;
5. $P \Rightarrow (Q\,\text{o}\,R)$, $\quad (P \Rightarrow R)\,\text{o}\,(Q \Rightarrow R)$.

1. Le tabelle di verità delle due proposizioni risultano entrambe uguali alla seguente

P	Q	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Avendo la stessa tabella di verità le due proposizioni sono equivalenti.
4. Risulta

P	Q	R	$(P\,\text{e}\,Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

P	Q	R	$(P \Rightarrow R)\,\text{e}\,(Q \Rightarrow R)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Le tabelle di verità sono diverse, quindi le proposizioni non sono equivalenti.
5. Le due proposizioni non sono equivalenti poiché quando P e Q sono vere e R è falsa, la prima proposizione risulta vera mentre la seconda è falsa.

Esercizio 1.5 *Dimostrare, con le tabelle di verità, che*

$$P\,\text{e}\,(Q\,\text{o}\,R) \quad \Longleftrightarrow \quad (P\,\text{e}\,Q)\,\text{o}\,(P\,\text{e}\,R)$$

$$P\,\text{o}\,(Q\,\text{e}\,R) \quad \Longleftrightarrow \quad (P\,\text{o}\,Q)\,\text{e}\,(P\,\text{o}\,R)$$

cioè congiunzione e disgiunzione sono distributive l'una rispetto all'altra.

Proposizioni sempre vere, regole di deduzione

Il valore di verità di una proposizione composta dipende in generale da quello delle singole componenti. Ci sono però proposizioni composte che risultano sempre vere (o sempre false) quali che siano i valori di verità delle singole componenti. Queste proposizioni verranno dette, con abuso di linguaggio, *vere* (o *false*), trascurando l'aggettivo "sempre". Eccone alcuni esempi:

$P \,\mathrm{o}(\mathrm{non}\, P)$ (terzo escluso)
$\mathrm{non}[P \,\mathrm{e}\, (\mathrm{non}\, P)]$ (principio di non contraddizione)
$[(P \Rightarrow Q) \,\mathrm{e}\, P] \Rightarrow Q$ (regola di deduzione diretta)
$[(P \Rightarrow Q) \,\mathrm{e}\, (\mathrm{non}\, Q)] \Rightarrow \mathrm{non}\, P$ (regola di deduzione inversa)
$[(P \Rightarrow Q) \,\mathrm{e}\, (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (transitività)

Negandole si ottengono altrettante proposizioni false.

Quantificatori

Le proposizioni verranno spesso costruite utilizzando i *quantificatori*:

$$\exists \text{ (esiste)}, \qquad \forall \text{ (per ogni)}.$$

Esempi:

$\exists\, x \;:\; x^2 \geq 1$ (vera) (si legge: esiste x tale che...)

$\forall\, x \;:\; x^2 \geq 1$ (falsa) (si legge: per ogni x si ha...)

$\forall\, x \;:\; x^2 \geq 0$ (vera)

$\exists\, x \;:\; x^2 < 0$ (falsa).

Per negare delle frasi in cui compaiono quantificatori si opera nel modo seguente:

$$\mathrm{non}\big(\exists\, x \;:\; P(x)\big) \iff \forall\, x \;:\; \mathrm{non}\, P(x)$$

$$\mathrm{non}\big(\forall\, x \;:\; P(x)\big) \iff \exists\, x \;:\; \mathrm{non}\, P(x)$$

dove $P(x)$ è una proposizione dipendente da x, cioè un *predicato*. Ad esempio, la negazione della frase "tutti i mammiferi sono animali terrestri" è la seguente: "esiste almeno un mammifero che non è un animale terrestre".

Esempio 1.6 Se $P(n)$ è la proposizione "n è un numero pari" allora

$$\text{non}\big(\exists\, n \ : \ P(n)\big) \quad\Longleftrightarrow\quad n \text{ è dispari per ogni } n$$

$$\text{non}\big(\forall\, n \ : \ P(n)\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \text{esiste almeno un } n \text{ dispari.}$$

Esercizio 1.7 *Negare le seguenti proposizioni in modo che la negazione compaia il più internamente possibile.*

1. $\exists\, x \ : \ \big(P(x) \,\text{o}\, Q(x)\big)$;

2. $\exists\, x \ : \ \big(P(x) \,\text{e}\, Q(x)\big)$;

3. $\exists\, x \ : \ \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$;

4. $\forall\, x \ : \ \big(P(x) \,\text{o}\, Q(x)\big)$;

5. $\forall\, x \ : \ \big(P(x) \,\text{e}\, Q(x)\big)$;

6. $\forall\, x \ : \ \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$.

1. Si ha

$$\text{non}\Big(\exists\, x \ : \ \big(P(x) \,\text{o}\, Q(x)\big)\Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x \ : \ \text{non}\big(P(x) \,\text{o}\, Q(x)\big)$$

e, per la *3.* di pagina 4, quest'ultima proposizione è equivalente a

$$\forall\, x \ : \ \text{non}\Bigg(\text{non}\Big(\big(\text{non}\, P(x)\big) \,\text{e}\, \big(\text{non}\, Q(x)\big)\Big)\Bigg)$$

e quindi a

$$\forall\, x \ : \ \big(\text{non}\, P(x)\big) \,\text{e}\, \big(\text{non}\, Q(x)\big).$$

2. Si ha

$$\text{non}\Big(\exists\, x \ : \ \big(P(x) \,\text{e}\, Q(x)\big)\Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x \ : \ \text{non}\big(P(x) \,\text{e}\, Q(x)\big)$$

e, per la *2.* di pagina 4, quest'ultima proposizione è equivalente a

$$\forall\, x \ : \ \text{non}\Bigg(\text{non}\Big(\big(\text{non}\, P(x)\big) \,\text{o}\, \big(\text{non}\, Q(x)\big)\Big)\Bigg)$$

e quindi a

$$\forall\, x \ : \ \big(\text{non}\, P(x)\big) \,\text{o}\, \big(\text{non}\, Q(x)\big).$$

3. Si ha

$$\text{non}\Big(\exists\, x \ : \ \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)\Big) \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x \ : \ \text{non}\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$$

e, per quanto visto precedentemente, quest'ultima proposizione è equivalente a

$$\forall\, x \ : \ \text{non}\Big(\big(\text{non}\, P(x)\big) \,\text{o}\, Q(x)\Big)$$

e $\big(\text{non}\, P(x)\big)\, \text{o}\, Q(x)$ equivale a $\text{non}\Big(P(x)\, \text{e}\, \big(\text{non}\, Q(x)\big)\Big)$ (cfr. *2.* di pagina 4) che, sostituita nella precedente, dà

$$\big(P(x) \text{ e non}\, Q(x)\big) \quad \forall\, x.$$

Osservazione 1.8 Spesso il quantificatore $\forall$ anziché all'inizio della proposizione viene collocato alla fine, lasciando invariato il significato, cioè le proposizioni

$$\forall\, x \ : \ P(x), \qquad P(x)\ \forall\, x$$

sono equivalenti.

Capitolo 2

Gli insiemi

Concetti primitivi

Si potrebbe pensare agli *insiemi* come a delle collezioni di oggetti, ma in questo caso rimarrebbe da precisare cosa sia una collezione. Perciò si preferisce non dare qui una definizione di insieme e considerare, rifacendosi all'intuizione comune, come primitivi i concetti di

insieme, (A)
elemento di un insieme, (a)
appartenenza di un elemento ad un insieme, $(a \in A)$.

Gli insiemi verranno indicati solitamente con lettere maiuscole $A, B, C, \ldots,$ mentre gli elementi con lettere minuscole $a, b, c \ldots$ Scriveremo $a \notin A$ per dire che l'elemento a non appartiene all'insieme A. Sinonimi di insieme sono *collezione*, *classe*, *famiglia*, eccetera. In ogni caso, di ogni insieme che consideriamo *deve essere possibile decidere se un elemento appartiene oppure non appartiene all'insieme.* Pertanto non sarà lecito parlare di "insieme dei numeri molto grandi" oppure di "insieme degli esercizi difficili".

Insieme vuoto

Ammettiamo l'esistenza (assioma) di un insieme che non contiene alcun elemento che chiameremo *insieme vuoto* (concetto primitivo) e indicheremo col simbolo $\varnothing$.

Uguaglianza e inclusione

Due insiemi si dicono *uguali* (definizione) se hanno gli stessi elementi, cioè, in simboli[1]

$$A = B \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \big(\forall\, x \ :\ x \in A \iff x \in B\big).$$

Siano A e B insiemi; si dice che A *è incluso* o *contenuto* in B (altra definizione) se ogni elemento di A è anche elemento di B; in simboli

$$A \subseteq B \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \big(\forall\, x \ :\ x \in A \Rightarrow x \in B\big).$$

Inoltre, *per convenzione*, ogni insieme ha tra i suoi sottoinsiemi l'insieme vuoto, cioè

$$\varnothing \subseteq A \text{ per ogni insieme } A.$$

Dalla definizione di inclusione segue che (teorema) $A \subseteq A$ *qualunque sia l'insieme A.* I sottoinsiemi di A diversi da A sono detti *sottoinsiemi propri* di A (definizione). Ad esempio, l'insieme dei numeri interi pari è un sottoinsieme proprio dei numeri interi. È facile verificare che (esercizio)

$$(A \subseteq B) \text{ e } (B \subseteq A) \quad \iff \quad A = B.$$

Rappresentazione degli insiemi

Esistono vari modi per rappresentare gli insiemi.

Rappresentazione grafica: consiste nel rappresentare l'insieme A come una regione del piano delimitata da una curva (*diagrammi di Eulero-Venn*).

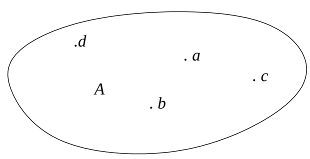


Diagramma di Venn

Gli elementi a, b, c, d,... dell'insieme A vengono elencati (o immaginati) dentro la regione e quelli che non vi appartengono si immaginano fuori. È

[1] La scritta "def" sopra la doppia implicazione sta qui ad indicare che si tratta di una definizione, e non di un teorema che necessiterebbe di una dimostrazione.

un tipo di rappresentazione molto suggestivo ma poco utile per capire come sono "definiti" gli insiemi in questione, soprattutto se non hanno un numero finito di elementi.

Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare tutti gli elementi dell'insieme. Ad esempio

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad P = \{2, 4, 6, 8, ...\}.$$

Si noti che gli elementi vengono posti tra parentesi graffe e che l'ordine con cui gli elementi vengono elencati non ha alcuna importanza. È efficace nella definizione di insiemi finiti oppure infiniti quando dall'elenco si possa dedurre in maniera non ambigua una regola induttiva che consenta di dire se un elemento sta oppure no nell'insieme. Ad esempio è evidente che l'insieme P vuole rappresentare i numeri pari, però può essere difficile capire che l'insieme

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$$

vuol rappresentare l'insieme dei numeri primi.

Rappresentazione intensiva o compatta: è molto efficace per rappresentare sottoinsiemi S di un insieme dato U. Il sottoinsieme viene individuato da una proprietà caratteristica che i suoi elementi devono soddisfare. Ad esempio, considerato l'insieme di tutti i numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

si possono considerare i sottoinsiemi

$$P = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ è divisibile per } 2\},$$

$$\mathcal{P} = \{n \in \mathbb{N} \ : \ n \text{ è divisibile solo per se stesso e per l'unità}\}.$$

In generale

$$S = \{x \in U \ : \ x \text{ soddisfa } P(x)\}$$

dove $P(x)$ è un predicato.

Avvertenza: questa procedura, che si applica ai sottoinsiemi, non funziona altrettanto bene per tutti gli insiemi; i logici si sono accorti infatti, agli inizi del '900, che non tutti i predicati definiscono un insieme.

Descrizione di un insieme, Paradosso di Russel

Tra i vari modi di definire gli insiemi vi è quello della rappresentazione intensiva visto sopra. Se ci lasciamo prendere dall'intuizione e pensiamo che ogni predicato $P(x)$ definisca un insieme, allora possiamo cadere in contraddizione. L'espressione

$$A = \{x \ : \ x \notin x\}$$

non può essere un insieme, perchè per definizione di A

- se fosse $A \in A$ allora avremmo $A \notin A$,
- se fosse $A \notin A$ allora avremmo $A \in A$

e quindi non è possibile dire se A è o non è un elemento. Più o meno succede la stessa cosa se definiamo il barbiere come

> "colui che fa la barba a chi non se la fa da solo".

Allora non sapremmo se il barbiere si fa la barba, perchè

- se il barbiere si fa la barba allora non potrebbe farsela altrimenti non sarebbe un barbiere,
- se il barbiere non si fa la barba allora sarebbe costretto a farsela.

Questo paradosso può essere evitato assegnando a priori un *ambiente* X di cui quello che stiamo cercando di descrivere è sottoinsieme, cioè la proprietà $P(x)$ deve potersi spezzare in

$$x \in X \quad \text{e} \quad x \in Q(x)$$

e in tal caso si scrive

$$A = \{x \in X \ : \ x \in Q(x)\}.$$

L'insieme X in questione si chiama *universo*. Per evitare il paradosso di Russel, da ora in poi assegneremo sempre a priori un universo che potrà essere di volta in volta ad esempio l'insieme dei numeri reali, o quello dei numeri interi, o dei punti o delle rette del piano, eccetera.

Insieme delle parti

Stabilita la regola, facciamo subito un'eccezione. Se A è un insieme, si chiama *insieme delle parti di A* l'insieme dei sottoinsiemi di A, cioè

$$\wp(A) = \{B \ : \ B \subseteq A\}.$$

Poichè non vi è modo di definire questo insieme con le cautele precedentemente descritte, di esso si postula l'esistenza (assioma!). Si potrebbe mostrare (ma noi ci fidiamo del lavoro dei logici) che ciò non da luogo a contraddizioni.

Ad esempio:

$$\begin{array}{lll} \text{se } A = \{a\} & \text{allora} & \wp(A) = \{\varnothing, A\} \\ \text{se } A = \{a,b\} & \text{allora} & \wp(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\} \\ \text{se } A = \varnothing & \text{allora} & \wp(A) = \{\varnothing\} \\ \text{se } A = \wp(\varnothing) & \text{allora} & \wp(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \end{array}$$

Esercizio 2.1 *Scrivere tutti gli elementi di $\wp(\{a,b,c\})$ e $\wp(\wp(\wp(\varnothing)))$.*

Si ha

$$\begin{aligned} \wp(\varnothing) &= \{\varnothing\} \\ \wp\big(\wp(\varnothing)\big) &= \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\} \\ \wp\Big(\wp\big(\wp(\varnothing)\big)\Big) &= \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \big\{\{\varnothing\}\big\}, \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}\Big\}. \end{aligned}$$

Unione e intersezione

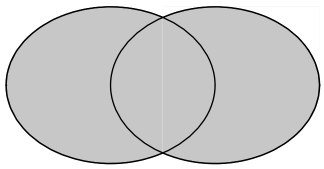
Siano A e B due sottoinsiemi di U. Si definisce *unione di A e B* l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad A oppure a B. In formule

$$A \cup B = \{x \in U \ : \ (x \in A) \,\mathrm{o}\, (x \in B)\}.$$

Si definisce *intersezione di A e B* l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad A che a B. In formule

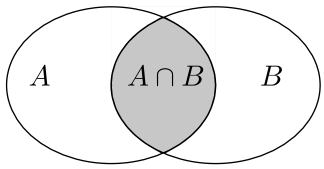
$$A \cap B = \{x \in U \ : \ (x \in A) \,\mathrm{e}\, (x \in B)\}.$$

Se $A \cap B = \varnothing$, cioè se A e B non hanno elementi in comune, allora si dicono *disgiunti*.



$A \cup B$

Unione



Intersezione

Proprietà associative e distributive

Esercizio 2.2 *Convincersi, utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn, che se A, B e C sono tre insiemi allora*

1. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Le prime due proposizioni affermano che unione e intersezione sono associative e le altre due che sono distributive l'una rispetto all'altra. Provare poi a dimostrarle utilizzando le definizioni di unione, intersezione e uguaglianza di insiemi.

3. Osserviamo che, per definizione di unione e di intersezione

$$A \cup (B \cap C) = \{x \ : \ x \in A \text{ o } (x \in B \text{ e } x \in C)\},$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{x \ : \ (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ o } x \in C)\}.$$

Definiamo i predicati $\mathcal{A}(x) =$ "$x \in A$", $\mathcal{B}(x) =$ "$x \in B$", $\mathcal{C}(x) =$ "$x \in C$". Per mostrare l'uguaglianza tra gli insiemi basterà far vedere che per ogni x

$$\mathcal{A}(x) \text{ o } (\mathcal{B}(x) \text{ e } \mathcal{C}(x)) \iff (\mathcal{A}(x) \text{ o } \mathcal{B}(x)) \text{e} (\mathcal{A}(x) \text{ o } \mathcal{C}(x)),$$

per esempio mostrando che per ogni terna di proposizioni semplici $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ si ha

$$\mathcal{A} \text{ o } (\mathcal{B} \text{ e } \mathcal{C}) \iff (\mathcal{A} \text{ o } \mathcal{B}) \text{e} (\mathcal{A} \text{ o } \mathcal{C})$$

con le tabelle di verità (questione già affrontata nell'esercizio 1.5). $\square$

Complementare, differenza

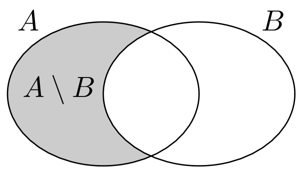
Dato un insieme U ed un sottoinsieme A, il *complementare* di A in U è l'insieme

$$A^C = \{x \in U \ : \ x \notin A\}.$$

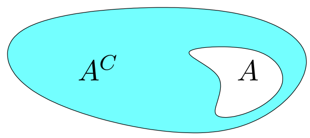
La *differenza* tra due sottoinsiemi A e B è l'insieme

$$A \setminus B = \{x \in U \ : \ (x \in A) \, \mathrm{e} \, (x \notin B)\}.$$

Si osservi che si ha $A^C = U \setminus A$.



Differenza



Complementare

Esercizio 2.3 *Convincersi, utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn, che valgono le seguenti proprietà*

1. $A \cap A^C = \varnothing$ *(principio di non contraddizione);*
2. $A \cup A^C = U$ *(principio del terzo escluso);*
3. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *(legge di De Morgan);*
4. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ *(legge di De Morgan);*
5. $(A^C)^C = A$.

Provare a dimostrarle utilizzando le definizioni di unione, intersezione e uguaglianza di insiemi.

Famiglie di insiemi.

Sia $\mathcal{F} \subseteq \wp(A)$. Definiamo *unione* della famiglia $\mathcal{F}$ l'insieme

$$\bigcup \mathcal{F} = \{a \in A \ | \ \exists X \in \mathcal{F} \ : \ a \in X\}$$

ed *intersezione* della famiglia $\mathcal{F}$ l'insieme

$$\bigcap \mathcal{F} = \{a \in A \ \mid \ a \in X \ \forall X \in \mathcal{F}\}.$$

Altre notazioni comunemente usate per indicare l'unione e l'intersezione della famiglia $\mathcal{F}$ sono $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{F}} A$ e $\bigcap\limits_{A \in \mathcal{F}} A$.

Dimostrare per esercizio che, se $\mathcal{F} = \{X_1, X_2\}$ allora

$$\bigcup \mathcal{F} = X_1 \cup X_2.$$

Più in generale si potrebbe dimostrare che se $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ allora

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n} X_i.$$

Partizioni di un insieme

Intuitivamente, ripartire o assegnare una *partizione* di un insieme significa suddividerlo in parti non vuote due a due disgiunte, ma queste parti possono essere anche in numero non finito.

Definizione 2.4 *Sia $A \neq \varnothing$ un insieme. Un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $\wp(A)$ è detto una* partizione *di A quando valgono le condizioni seguenti*

1. $\forall X \in \mathcal{F} \ : \ X \neq \varnothing$ *(ossia $\varnothing \notin \mathcal{F}$);*
2. $\forall a \in A \ \exists! X \in \mathcal{F} \ : \ a \in X.$

Esempio 2.5 Partizioni banali di un insieme A sono $\mathcal{F} = \big\{\{a\} \ : \ a \in A\big\}$ e $\mathcal{F} = \{A\}$.

Esercizio 2.6 *Dimostrare che le proposizioni*

1. $\forall a \in A \ \exists! X \in \mathcal{F} \ : \ a \in X,$
2. $\bigcup \mathcal{F} = A$ e $X \cap Y = \varnothing \ \forall X, Y \in \mathcal{F} \ : \ X \neq Y,$

sono equivalenti.

Proviamo $\Rightarrow$. *1.* implica che

$$\forall a \in A\ \exists X \in \mathcal{F}\ :\ a \in X,$$

quindi, per definizione di $\bigcup \mathcal{F}$, si ha $\bigcup \mathcal{F} \supseteq A$ e quindi

$$\bigcup \mathcal{F} = A.$$

Siano ora X ed Y due elementi di $\mathcal{F}$, e supponiamo che $X \cap Y \neq \varnothing$. Sia $b \in X \cap Y$; per (i), in corrispondenza a b deve esistere un unico $X \in \mathcal{F}$ tale che $b \in X$; per l'unicità segue allora che $X = Y$.
Proviamo $\Leftarrow$. Per definizione di $\bigcup \mathcal{F}$, *2.* implica che

$$\forall a \in A\ \exists X \in \mathcal{F}\ :\ a \in X.$$

Rimane da provare l'unicità. Supponiamo che Y sia un altro elemento di $\mathcal{F}$ con $a \in Y$. Ma allora $X \cap Y \neq \varnothing$ e perciò $X = Y$.

Esercizio 2.7 *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi. Dimostrare che valgono le* leggi di De Morgan

$$\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A^C, \qquad \Big(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^C.$$

Ricordiamo che le definizioni di unione e intersezione della famiglia $\mathcal{F}$ sono, rispettivamente,

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \{a\ :\ \exists A \in \mathcal{F}\ :\ a \in A\}, \qquad \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{a\ :\ a \in A\ \forall\, A \in \mathcal{F}\}.$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C &= \{a\ :\ \text{non}(\exists A \in \mathcal{F}\ :\ a \in A)\}\\ &= \{a\ :\ \forall A \in \mathcal{F}\ :\ a \notin A\}\\ &= \{a\ :\ \forall A \in \mathcal{F}\ :\ a \in A^C\} = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A^C\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\Big(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\Big)^C &= \{a\ :\ \text{non}(a \in A\ \forall\, A \in \mathcal{F})\}\\ &= \{a\ :\ \exists\, A \in \mathcal{F}\ :\ a \notin A\}\\ &= \{a\ :\ \exists\, A \in \mathcal{F}\ :\ a \in A^C\} = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^C.\end{aligned}$$

Prodotto cartesiano

Assumiamo un altro concetto primitivo: quello di *coppia ordinata* (x, y), dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y, cioè

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ e } y = y'.$$

È il caso di osservare che, in generale

$$\{a, b\} = \{b, a\} \text{ mentre } (a, b) \neq (b, a).$$

Se A e B sono due insiemi, il loro *prodotto cartesiano* è l'insieme

$$A \times B = \{(x, y) \ : \ x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Ad esempio $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è l'usuale piano cartesiano.

Nota: Si può evitare di assumere la nozione di coppia ordinata come primitiva ponendo per definizione

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Mostrare che con tale definizione risulta

$$(x, y) = (x', y') \qquad \iff \qquad x = x' \text{ e } y = y'.$$

In tal modo la coppia (x, y) risulta essere un sottoinsieme di $\wp(A \cup B)$ e quindi un elemento di $\wp\big(\wp(A \cup B)\big)$.

Esercizi

Esercizio 2.8 *Provare che le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

1. $A \subseteq B$;
2. $A \cup B = B$;
3. $A \cap B = A$;
4. $A \setminus B = \varnothing$.

Mostriamo che 1⇒2. Si ha, per definizione,

$$A \subseteq B \iff \forall x \ : \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

mentre

$$A \cup B = B \iff \forall x \ : \ (x \in A \text{ o } x \in B \iff x \in B)$$

per cui basta dimostrare l'equivalenza logica tra le proposizioni "$\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B}$" e "($\mathcal{A}o\mathcal{B}$) $\iff$ $\mathcal{B}$". **Suggerimento:** Si può essere in dubbio su come trattare l'insieme vuoto. A tal fine si può usare il fatto che $\varnothing = A \cap A^C$ come osservato sopra, che porta ad associare ad esso una proposizione del tipo ($\mathcal{A}$ e non$\mathcal{A}$), che è sempre falsa.

Esercizio 2.9 *Siano A e B insiemi non vuoti; mostrare che*

$$A \cap B = \varnothing \;\;\Rightarrow\;\; A \neq B.$$

Osserviamo che date due proposizioni P e Q le proposizioni composte $P\Rightarrow Q$ e non$Q\Rightarrow$non$P$ sono equivalenti. Possiamo allora dimostrare la proposizione equivalente

$$A = B \;\;\Rightarrow\;\; A \cap B \neq \varnothing.$$

Supponiamo dunque che $A = B$, da cui segue che $A\cap B = A \neq \varnothing$ e pertanto la proposizione è provata.

Esercizio 2.10 *Mostrare che*

$$C \subseteq A \qquad \iff \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

Proviamo $\Rightarrow$. Se $C \subseteq A$ allora, per la proprietà distribuitiva, si ha

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup C.$$

Proviamo $\Leftarrow$. Si ha, in particolare, $C \subset A \cap (B \cup C)$, da cui $C \subseteq A$.

Esercizio 2.11 *Dimostrare che*

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(questo insieme si chiama differenza simmetrica *di A e B e si indica col simbolo $A\triangle B$).*

Esercizio 2.12 *Scrivere gli elementi dell'insieme*

$$\wp\Big(\wp\big(\wp(\wp(\varnothing))\big)\Big);$$

(controllare che siano 2^4).

Esercizio 2.13 *Mostrare che se A e B sono due insiemi allora*

$$A = B \qquad \iff \qquad A\triangle B = \varnothing.$$

Capitolo 3

Relazioni e funzioni

Relazioni binarie

Definizione 3.1 *Siano A e B insiemi non vuoti. Chiamiamo* relazione (binaria) *tra A e B qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Le relazioni tra A ed A verranno dette relazioni in A.*

Se $\mathcal{R}$ è una relazione, e se $(a, b) \in \mathcal{R}$ scriveremo anche $a\mathcal{R}b$ e diremo che *a è in relazione con b*. Se $A = B$ si parla di *relazione in A*.

Esempio 3.2 Sia $A = \{1, 2, 3\}$, e sia

$$M = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 3)\} \subseteq A \times A.$$

M è una relazione in A. Essa potrebbe essere descritta nel modo seguente

$$(x, y) \in M \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in A,\ y \in A \text{ e } x < y.$$

Esempio 3.3 Una relazione tra l'insieme M dei maschi e quello F delle femmine, è l'insieme costituito dalle coppie maschio-femmina tra cui intercorre una "relazione" intesa nel senso comune del termine.

Esempio 3.4 In $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relazione $\mathcal{R}$ definita da

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \leq 1$$

è il cerchio di centro 0 e raggio 1.

Esercizio 3.5 Rappresentare graficamente la relazione

$$x\mathcal{R}y \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| + |y| \leq 1.$$

Esercizio 3.6 $\leq$ è una relazione in $\mathbb{R}$. Rappresentarla graficamente.

Esempio 3.7 Il *parallelismo* e la *perpendicolarità* sono relazioni nell'insieme delle rette del piano.

Esempio 3.8 Sia E un insieme. L'inclusione è una relazione nell'insieme delle parti di E.

Il caso più importante di relazione di un insieme in un altro (generalmente diverso dal primo) è quello delle "funzioni", che tratteremo più avanti. Consideriamo ora invece alcune importanti categorie di relazioni di un insieme in sé: quelle di ordine e quelle di equivalenza.

Relazioni di equivalenza

Definizione 3.9 *Sia A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione in A. $\mathcal{R}$ è detta di* equivalenza *quando sono soddisfatte le seguenti proprietà:*

1. $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$ *(riflessiva)*
2. $\forall x, y \in A \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ *(simmetrica)*
3. $\forall x, y, z \in A \quad x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ *(transitiva).*

Per denotare le relazioni di equivalenza si usano più comunemente i simboli

$$\equiv \quad \text{oppure} \quad \sim$$

Esempio 3.10 La relazione "$x = y$ per ogni x ed y" è di equivalenza su qualunque insieme.

Esempio 3.11 La relazione

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x \text{ ed } y \text{ qualsiasi}$$

è di equivalenza.

Esempio 3.12 Nell'insieme delle rette del piano, la relazione

$$r \sim s \quad \Longleftrightarrow \quad r \text{ è parallela ad } s$$

è di equivalenza. La relazione di perpendicolarità

$$r\mathcal{R}s \quad \Longleftrightarrow \quad r \perp s$$

non è di equivalenza perchè non gode né della proprietà riflessiva, né di quella transitiva.

Esempio 3.13 L'equivalenza di proposizioni è una relazione di equivalenza nell'insieme delle proposizioni.

Esempio 3.14 Sia $p \in \mathbb{N}$. La relazione in $\mathbb{Z}$

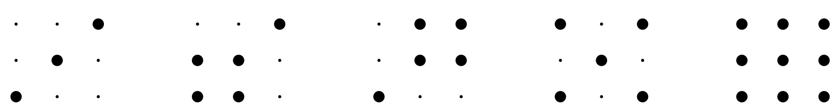
$$\begin{array}{rcl} x \sim y & \Longleftrightarrow & x - y \text{ è multiplo di } p \\ & \Longleftrightarrow & \exists r \in \mathbb{Z} \ : \ x - y = rp \end{array}$$

è di equivalenza. Si chiama *congruenza modulo* p, e si indica con $\equiv_p$.

Esempio 3.15 Su un insieme di due elementi $X = \{x, y\}$ le relazioni di equivalenza sono tutte e sole le seguenti

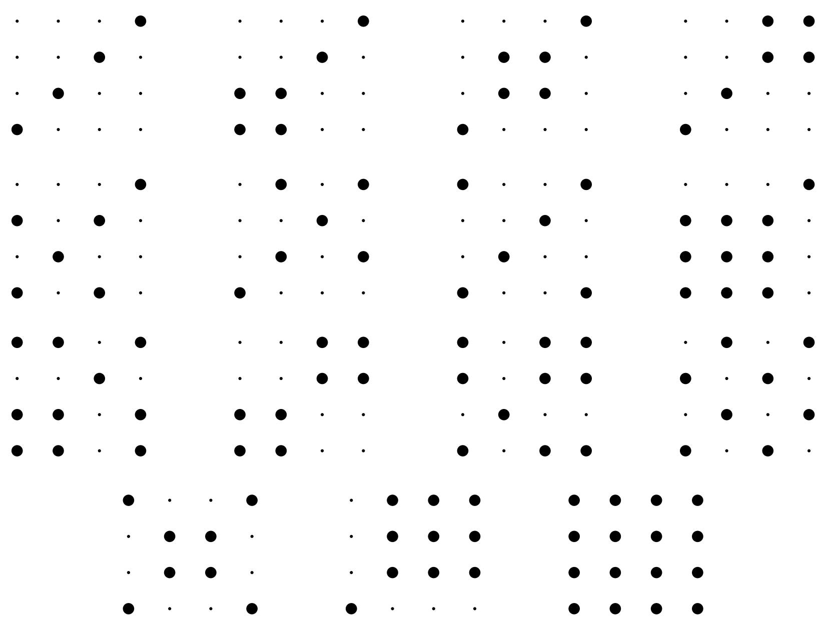
$$\begin{array}{ll} \mathcal{A} & = \{(x,x),(y,y)\} \\ \mathcal{B} & = \{(x,x),(y,y),(x,y),(y,x)\} = X \times X \end{array}$$

Esempio 3.16 In un insieme di 3 elementi tutte e sole le relazioni di equivalenza sono (graficamente)



Esercizio 3.17 Scrivere tutte e sole le relazioni di equivalenza in un insieme di 4 elementi.

Esse sono (graficamente)



Insieme quoziente

Sia A un insieme non vuoto e $\sim$ una relazione di equivalenza in A. Per ogni $x \in A$ poniamo

$$\begin{aligned}[x] &= \{y \in A \;:\; y \sim x\} \\ &= \text{ classe di equivalenza di rappresentante } x.\end{aligned}$$

Le classi di equivalenza godono della seguente proprietà.

Proposizione 3.18 $[x] = [y] \iff x \sim y.$

DIMOSTRAZIONE Proviamo $\Rightarrow$. Siano x ed y tali che $[x] = [y]$. Sia $z \in [x]$. Allora $z \sim x$ e $z \sim y$. Per la proprietà simmetrica si ha $x \sim z$, e per quella transitiva allora $x \sim y$.

Proviamo $\Leftarrow$. Sia $x \sim y$. Proviamo che $[x] \subseteq [y]$ e che $[x] \supseteq [y]$. Sia $z \in [x]$. Allora $z \sim x$ e poiché $x \sim y$, per la proprietà transitiva si ha $z \sim y$, cioè $z \in [y]$, da cui segue la prima inclusione. Analogamente, supponendo $z \in [y]$ si prova l'altra. $\square$

Teorema 3.19 (del quoziente) *Sia $A \neq \varnothing$ e $\sim$ una relazione di equivalenza in A. Si consideri la famiglia $\mathcal{F}$ così definita*

$$\mathcal{F} = \{X \in \wp(A) \;\mid\; \exists x \in A \;:\; X = [x]\} =$$

$$= \{[x] \;:\; x \in A\}.$$

$\mathcal{F}$ è una partizione di A.

$\mathcal{F}$ si chiama *insieme quoziente di A modulo la relazione di equivalenza* $\sim$ e si indica col simbolo $A/_\sim$. Il teorema ora enunciato afferma che una relazione di equivalenza in A determina una partizione di A in classi di equivalenza.

Esempio 3.20 *(Scuola elementare)* Sia S l'insieme (non vuoto) di tutti gli scolari di una scuola elementare. Questo insieme S sarà detto "scuola". In S introduciamo la seguente relazione

$$x, y \in S \quad x \sim y \quad \iff \quad x \text{ e } y \text{ frequentano lo stesso anno di corso}$$

$\sim$ è una relazione di equivalenza (verificare!). Se lo scolaro $x \in S$ fa la prima allora alla classe di equivalenza di x appartengono tutti gli scolari che fanno la prima, cioè $[x] = 1^a$ classe. Così si trova che

$$A/_\sim = \{1^a \text{ classe}, 2^a \text{ classe}, 3^a \text{ classe}, 4^a \text{ classe}, 5^a \text{ classe}\}$$

e la scuola S risulta così ripartita nell'insieme delle sue classi.

Esempio 3.21 Per la relazione $=$ si ha $A/_= \; = \; \big\{\{a\} \; : \; a \in A\big\}$.

Esempio 3.22 Per la relazione ($x \sim y \iff x$ ed y qualunque) si ha $A/_\sim = \big\{[x]\big\}$ dove x è un qualunque elemento di A.

Esempio 3.23 Per la relazione $r \parallel s$ nel piano Π, si ha $\Pi/_\parallel \; = \; \big\{[r] \; : \; r \text{ passa per l'origine}\big\}$.

Esempio 3.24 Per la relazione $\equiv_p$ ($p \in \mathbb{N}$) in $\mathbb{Z}$ si ha

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_p} = \{[0], [1], \cdots, [p-1]\}.$$

DIMOSTRAZIONE (Del teorema del quoziente). Sia $X \in \mathcal{F}$; allora esiste $x \in A$ tale che $X = [x]$. Per la proprietà riflessiva di $\sim$ si ha $x \in [x] = X$, quindi $X \neq \varnothing$, ed è soddisfatta la prima proprietà delle partizioni.

Mostriamo che è soddisfatta anche la seconda. Sia $x \in A$. Allora $[x] \in \mathcal{F}$ e quindi è chiaro che

$$\exists X \in \mathcal{F} \; : \; x \in X$$

infatti basta prendere $X = [x]$. Rimane da provare che tale X è unico, cioè che se supponiamo l'esistenza di un altro $Y \in \mathcal{F}$ tale che $x \in Y$, allora risulta che $Y = X$. Poichè $Y \in \mathcal{F}$ allora esiste $y \in A$ tale che $Y = [y]$. Poiché $x \in Y = [y]$ allora $x \sim y$, e quindi per la proposizione dimostrata in precedenza si ha $[x] = [y]$, cioè $X = Y$. □

Relazioni di ordine

Definizione 3.25 *Sia A un insieme non vuoto e $\mathcal{R}$ una relazione in A. $\mathcal{R}$ è detta di* ordine *quando sono soddisfatte le seguenti proprietà*

1. $\forall x \in A \quad x\mathcal{R}x$ *(riflessiva);*
2. $\forall x, y, z \in A \quad x\mathcal{R}y, \; y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ *(transitiva);*
3. $\forall x, y \in A \quad (x\mathcal{R}y)$ e $(y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ *(antisimmetrica).*

Una relazione che soddisfi solo le proprietà riflessiva e transitiva si dice di preordine.

Per denotare le relazioni di ordine si usano simboli del tipo

$$\preceq \quad \leq \quad \subseteq .$$

Definizione 3.26 *Sia A un insieme non vuoto e $\leq$ una relazione d'ordine in A. La coppia $(A, \leq)$ si chiama* insieme ordinato.

Osservazione 3.27 L'unica relazione di equivalenza che sia anche di ordine è l'uguaglianza (provarlo!).

Esempio 3.28 In $\mathbb{R}$ la relazione $x^2 \leq y^2$ non è un ordine; facciamo vedere che cade la proprietà antisimmetrica. La sua negazione è

$$\exists x, y \ : \ (x\mathcal{R}y) \ e \ (y\mathcal{R}x) \text{ e non}(x = y)$$

(mostrarlo per esercizio), cioè

$$\exists x, y \ : \ x^2 \leq y^2 \text{ e } y^2 \leq x^2 \text{ e } x \neq y$$

e questo è vero: vanno bene tutti gli x ed y con la proprietà $0 \neq x = -y$ come, ad esempio, $x = 1$ e $y = -1$.

Esempio 3.29 La relazione di inclusione, $\subseteq$, in $\wp(A)$ è di ordine.

Esempio 3.30 La relazione di minore o uguale, $\leq$, in $\mathbb{R}$ è di ordine.

Esempio 3.31 La relazione di minore $<$ in $\mathbb{R}$ non gode della proprietà riflessiva, pertanto non è un ordine.

Definizione 3.32 *Un ordine si dice* totale *se (indicato con $\leq$ l'ordine)*

$$\forall x, y \in X \ \textit{si ha} \ x \leq y \ \textit{oppure} \ y \leq x \quad \textit{(dicotomia).}$$

Definizione 3.33 *Un ordine su un insieme X si dice filtrante se (indicando con $\preceq$ l'ordine) si ha*

$$\forall x, y \in X \ \exists z \in X \ : \ x \preceq z \text{ e } y \preceq z.$$

Esempio 3.34 La relazione di inclusione in $\wp(A)$ è un ordine filtrante non totale.

Massimo e Minimo

Definizione 3.35 *Sia A un insieme non vuoto, ordinato (cioè dotato di una relazione d'ordine $\leq$). Un elemento $\overline{a} \in A$ si dice* massimo *se*

$$a \leq \overline{a} \ \ \forall a \in A.$$

Un elemento $\underline{a} \in A$ si dice minimo *se*

$$a \geq \underline{a} \ \ \forall a \in A.$$

Proposizione 3.36 *In un insieme ordinato con piú di un elemento non ci può essere un massimo che sia contemporaneamente minimo.*

La dimostrazione verrà fatta *per assurdo*, cioè si suppone che la tesi non sia vera e, attraverso una catena di deduzioni si cerca di ottenere una contraddizione, cioè una proposizione vera insieme alla sua negazione. Poichè ciò è vietato dalla nostra logica possiamo concludere che questo risultato "assurdo" è dovuto al fatto di aver supposto che la tesi sia falsa. Non potendo essere falsa, allora la tesi deve essere vera e la proposizione è dimostrata.

DIMOSTRAZIONE Procediamo per assurdo. Infatti, se $\underline{\overline{a}}$ fosse un tale elemento, ed $a \neq \underline{\overline{a}}$ (un tale a esiste perchè l'insieme contiene piú di un elemento) si avrebbe

$$\underline{\overline{a}} \leq a \quad \text{e} \quad \underline{\overline{a}} \geq a$$

da cui, per la proprietà antisimmetrica segue che $a = \underline{\overline{a}}$, contro il fatto che $a \neq \underline{\overline{a}}$. □

Esercizio 3.37 *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Dimostrare che X non può avere più di un minimo.*

Supponiamo che x_1 e x_2 siano due minimi di X. Per definizione allora $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ e

$$x_1 \leq x \;\forall\, x \in X \quad \text{e} \quad x_2 \leq x \;\forall\, x \in X.$$

In particolare si ha

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{e} \quad x_2 \leq x_1$$

da cui, per la proprietà antisimmetrica segue che $x_1 = x_2$, e quindi l'unicità del minimo.

Funzioni

Definizione 3.38 *Una relazione f tra due insiemi non vuoti A e B si dice* funzione *(o* mappa *o* applicazione*) se*[1]

$$\forall\, x \in A \;\exists!\, y \in B \;:\; (x, y) \in f$$

A si dice dominio *di f, B* codominio *di f. In luogo di $(x, y) \in f$ si scrive usualmente $y = f(x)$, x è la* variabile *ed $f(x)$ il* valore *di f in x.*

[1]il simbolo ∃! si legge: *esiste ed è unico*

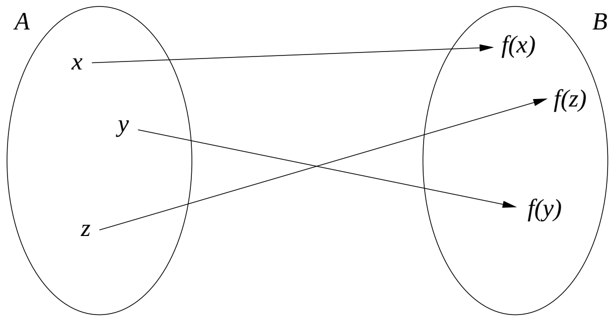
Notazione:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

In pratica, il simbolo $f(x)$ indica il complesso delle operazioni che si devono effettuare su x per ottenere y. Per esempio:

$$f(x) = x^2 - 1, \quad \text{oppure} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 7 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se gli insiemi A a B si rappresentano con i diagrammi di Venn, la funzione $f : A \to B$ viene rappresentata con frecce che uniscono ciascun x con il corrispondente $f(x)$.



Rappresentazione grafica di una funzione

Grafico di una funzione

La definizione di funzione ora data è in un certo senso impropria perché quello che abbiamo chiamato "funzione" è in realtà il "grafico della funzione". In alcuni vecchi libri di matematica (o anche in alcune trattazioni informali) si trova la definizione di funzione come "una legge f che ad ogni elemento x del dominio associa uno ed un solo elemento $y = f(x)$ del codominio", assumendo come primitiva la nozione di "legge", e si definisce poi il grafico della funzione come l'insieme

$$G = \{(x, y) \in A \times B \ : \ y = f(x)\}.$$

Nella matematica moderna invece si preferisce definire la funzione come una particolare relazione identificando in tal modo la funzione con il suo grafico.

Esercizio 3.39 † *Dire, tra le seguenti relazioni in $\mathbb{R}$, quali sono grafici di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e quali no.*

1. $\{(x, y) \; : \; xy \geq 0\}$;
2. $\{(x, y) \; : \; xy = 0\}$;
3. $\{(x, y) \; : \; xy = 1\}$;
4. $\{(x, y) \; : \; (x \neq 0 \text{ e } xy = 1) \text{ o } (x = 0 \text{ e } y = 0)\}$.

Esempi di funzioni

Importanti esempi di funzioni sono i seguenti.

1. **applicazione costante.** Ogni funzione definita in A con la proprietà:
$$f(x_1) = f(x_2) \; \forall x_1, x_2 \in A.$$
2. **identità.** $\mathrm{id}_A : A \to A$ definita da $\mathrm{id}_A(x) = x$.
3. **inclusione.** Se $B \subseteq A$, l'applicazione di inclusione $\mathrm{j} : B \hookrightarrow A$ è data da $\mathrm{j}(x) = x$.
4. **proiezioni.** $\Pi_1 : A \times B \to A$ data da $\Pi_1(x, y) = x$ e $\Pi_2 : A \times B \to B$ data da $\Pi_2(x, y) = y$, si dicono proiezioni sul primo e sul secondo fattore, rispettivamente.
5. **successioni.** Sono le funzioni $f : \mathbb{N} \to A$ (successioni in A) e si indicano con $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ anzichè $f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots$.

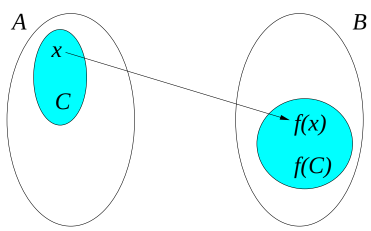
Immagine

Considerato un elemento x del dominio A, il corrispondente valore $f(x)$ si chiama anche *immagine* di x mediante la funzione f.

Se anziché un singolo $x \in A$ si considerano tutti quelli che appartengono ad un sottoinsieme $C \subseteq A$, l'insieme $\{y \in B \; : \; \exists x \in C \; : \; y = f(x)\}$ o, più brevemente,

$$f(C) := \{f(x) \; : \; x \in C\},$$

si dice *immagine* di C mediante f.



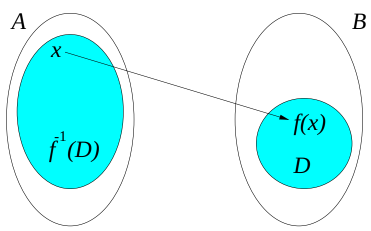
† *1.* no; *2.* no; *3.* no; *4.* si.

Spesso si parla dell'immagine di una funzione f senza specificare l'insieme C: in tal caso si intende che $C = A$, cioè si vuol parlare dell'immagine di tutto il dominio. Se B è il codominio di f, è chiaro che si ha $f(A) \subseteq B$. Per esempio, l'immagine di una funzione costante è costituita da un solo elemento mentre l'immagine di id_A è $\mathrm{id}_A(A) = A$.

Controimmagine o immagine inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione e sia $D \subseteq B$. Si chiama *controimmagine* o *immagine inversa* di D mediante f e si denota con $f^{-1}(D)$ il seguente sottoinsieme di A:

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \ : \ f(x) \in D\}.$$



Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Definizione 3.40 *Una funzione $f : A \to B$ si dice*

- iniettiva *se a punti distinti corrispondono valori distinti, cioè*

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$$

  (o, equivalentemente, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$);

- suriettiva *se il codominio B coincide con l'immagine $f(A)$, cioè*

$$\forall\, y \in B \ \exists\, x \in A \ : \ y = f(x);$$

- biiettiva *se è sia iniettiva che suriettiva.*

Esempio 3.41 a) La funzione che associa ad ogni persona il relativo codice fiscale è una funzione iniettiva (perché i codici fiscali sono tutti diversi).

b) La funzione che associa ad ogni persona residente in Udine la casa in cui risiede non è iniettiva perché persone che abitano nella stessa casa hanno lo stesso corrispondente.

c) Per ogni insieme A, la funzione identità su A è biiettiva.

Esercizio 3.42 *Siano A e B due insiemi. Dimostrare che se $f : A \to B$ è una funzione iniettiva allora, per ogni $x, y \in A$*

$$x = y \iff f(x) = f(y).$$

Sottolineiamo che dominio e codominio costituiscono parte integrante della funzione. Ad esempio, le funzioni

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

avendo dominio oppure codominio diversi definiscono funzioni diverse, giustamente denotate con lettere diverse f, g e h, sebbene abbiano la stessa legge e quindi, spesso ma con abuso di notazione, vengano indicate con la stessa lettera. La diversità tra le tre funzioni diviene ancora più evidente analizzandone le proprietà:

- f non è iniettiva né suriettiva;
- g è iniettiva ma non suriettiva;
- h è biiettiva.

Somma, prodotto e quoziente di funzioni

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$, se $x \in A \cap B$ è possibile considerare sia $f(x)$ che $g(x)$ che, essendo numeri reali possono essere sommati, moltiplicati ed, eventualmente, divisi. Si definiscono così le funzioni *somma di f e g* e *prodotto di f e g*, rispettivamente, nel seguente modo

$$\begin{aligned} f + g : A \cap B &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g : A \cap B &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Nel caso del *quoziente di f e g* dobbiamo assicurarci che $g(x)$ sia diverso da 0. La funzione quoziente sarà allora definita da

$$\begin{aligned} f/g : A \cap B \cap \big\{x \ : \ g(x) \neq 0\big\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f/g)(x) := f(x)/g(x). \end{aligned}$$

Esempio 3.43 Determiniamo il dominio della funzione h somma delle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{1-x}$. Come vedremo nel seguente capitolo la funzione radice quadrata è definita solamente quando l'argomento è non negativo perciò il dominio di f è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\}$ mentre quello di g è $\{x \in \mathbb{R} \ : \ 1-x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 1\}$. La funzione $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ è dunque definita su $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq 1\} = [0,1]$.

Esercizio 3.44 *Determinare il dominio della funzione* $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$.

La funzione è quoziente di $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x-2$ che sono definite per ogni numero reale. Il dominio di h è dato da tutti i valori di x per cui il denominatore $g(x)$ non si annulla, cioè $\{x \in \mathbb{R} \ : \ x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Funzioni composte, restrizione

Definizione 3.45 *Se* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*, diremo* funzione composta *di* f *e* g *la funzione*

$$\begin{aligned} g \circ f : \quad & A \to C \\ & x \mapsto g \circ f(x) := g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

Ad esempio la funzione $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ può essere pensata come funzione composta di $f(x) = x^2 + 1$ e $g(y) = \sqrt{y}$.

Definizione 3.46 *Se* $f : A \to B$ *è una funzione, e* $C \subseteq A$*, la* restrizione *di* f *a* C *è la funzione*

$$\begin{aligned} f|_C : \quad & C \to B \\ & x \mapsto f|_C(x) = f(x) \end{aligned}$$

Osservazione 3.47 Se $j : C \hookrightarrow A$ è l'applicazione di inclusione di C in A, allora

$$f|_C = f \circ j.$$

Funzione inversa e invertibilità

Definizione 3.48 *Sia assegnata una funzione* $f : A \to B$*. Una funzione* $g : B \to A$ *si dice* inversa *di* f *se*

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{id}_A \\ f \circ g &= \mathrm{id}_B. \end{aligned}$$

Una funzione $f : A \to B$ *si dice* invertibile *se esiste un'inversa.*

Esempio 3.49 Non esiste alcuna funzione invertibile tra gli insiemi $A = \{a\}$ e $B = \{a, b\}$. Questo fatto mostra in particolare che le due condizioni $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$ sono entrambe essenziali.

Proposizione 3.50 *Se $f : A \to B$ è invertibile, allora la sua inversa è unica. La funzione inversa g si denota usualmente col simbolo f^{-1}.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo che f abbia due inverse g_1 e g_2. Allora

$$g_1 = \mathrm{id}_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ \mathrm{id}_B = g_2.$$

cioè $g_1 = g_2$. □

Esercizio 3.51 *Con le notazioni della precedente definizione, dimostrare che se f è invertibile allora*

$$f^{-1}(C) = \{f^{-1}(y) \ : \ y \in C\}.$$

Proposizione 3.52 *$f : A \to B$ è invertibile se e solo se è biiettiva.*

DIMOSTRAZIONE ($\Rightarrow$). f è iniettiva, infatti

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \iff x_1 = x_2.$$

f è suriettiva, infatti se $y \in B$ allora preso $x = f^{-1}(y)$ si ha $y = f(x)$. Essendo iniettiva e suriettiva f è biiettiva.
($\Leftarrow$). Sia f biiettiva. Per la suriettività, per ogni $y \in B$ esiste $x \in A$ (unico per l'iniettività) tale che $f(x) = y$. Detto $g(y) = x$ resta definita una funzione $g : B \to A$ che verifica le proprietà per essere l'inversa di f. □

Esempio 3.53 *(Identità).* Sia A un insieme non vuoto. id_A è invertibile. Inoltre $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.

Esempio 3.54 Mostriamo che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 2x + 3$ è invertibile. Verifichiamo innanzitutto che è iniettiva; in base alla definizione dobbiamo provare che, comunque presi due elementi del dominio x_1, x_2 con $f(x_1) = f(x_2)$ segue che $x_1 = x_2$. Si ha infatti

$$f(x_1) = f(x_2) \iff 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \iff 2x_1 = 2x_2 \iff x_1 = x_2.$$

Verifichiamo ora che la funzione è suriettiva: preso un qualsiasi elemento y del codominio $\mathbb{R}$, dobbiamo trovare un elemento x del dominio tale che

$f(x) = y$. Dobbiamo dunque risolvere l'equazione $f(x) = y$ nell'incognita x. Si ha

$$f(x) = y \iff 2x + 3 = y \iff 2x = y - 3 \iff x = \frac{y-3}{2}.$$

La soluzione esiste (quindi f è suriettiva) ed è data da $x = (y-3)/2$ che è anche l'espressione dell'inversa di f

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto (y-3)/2. \end{aligned}$$

Verificare per esercizio che f^{-1} soddisfa le condizioni della Definizione 3.48.

Esercizio 3.55 *Siano a, b due numeri reali fissati con $a \neq 0$. Dimostrare che l'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = ax + b$ è invertibile e che l'inversa è data da $f^{-1}(y) = (y - b)/a$.*

Esempio 3.56 La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1 + x^2$ non è invertibile perché non è iniettiva né suriettiva. Risulta però invertibile la funzione $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ definita sempre da $f(x) = 1 + x^2$ (verificarlo). L'inversa $f^{-1} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ deve essere tale che

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \text{e} \quad f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

Dunque, per definizione di f, $f^{-1}(y)$ deve soddisfare

$$1 + \big(f^{-1}(y)\big)^2 = y$$

cioè, dovendo anche essere $f^{-1}(y) \in [0, +\infty[$, si ha $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$. È invertibile anche la restrizione di f all'intervallo $]-\infty, 0]$. Determinare l'inversa.

Esercizio 3.57 † *Sia $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ la funzione definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x \leq a \\ 1 - x & \text{se } x > a \end{cases}$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

---

† *1.* $a \leq -1$. *2.* $a = -1$ e per tale valore si ha $f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{y}{2}} & \text{se } y \geq 2 \\ 1 - y & \text{se } y < 2 \end{cases}$

3. $f^{-1} :]-\infty, 3[\cup [8, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{y}{2}} & \text{se } y \geq 8 \\ 1 - y & \text{se } y < 3 \end{cases}$

1. *Dire per quali valori di a la funzione è invertibile.*
2. *Dire per quali valori di a si ha* $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *e, per tali valori di a determinare, se esiste, la funzione inversa* $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. *Per* $a = -2$ *determinare dominio, immagine e legge della funzione inversa.*

Grafico della funzione inversa

Se f è invertibile allora $(x, f(x)) = (f^{-1}(y), y)$, che suggerisce che il grafico di f^{-1} si può ottenere da quello di f scambiando gli assi o, equivalentemente, riflettendo simmetricamente il grafico di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

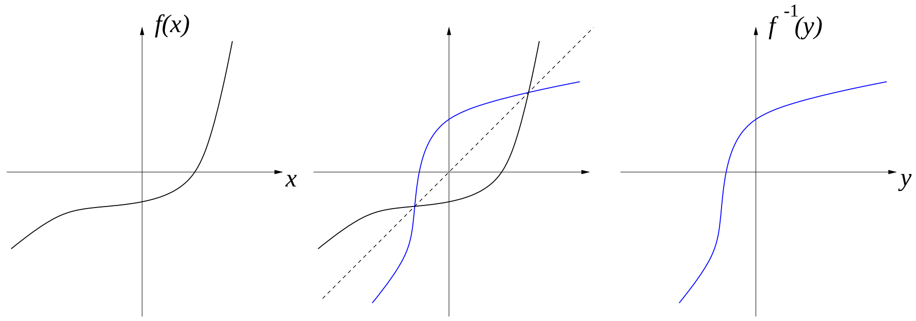


Grafico di f | Riflessione | Grafico di f^{-1}

Funzioni monotone

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *monotona strettamente crescente* se, per ogni $x, y \in A$ si ha

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

e *monotona strettamente decrescente* se, per ogni $x, y \in A$ si ha

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

f si dice *monotona crescente* (o *non decrescente*) se, per ogni $x, y \in A$ si ha

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

e *monotona decrescente* (o *non crescente*) se, per ogni $x, y \in A$ si ha

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Si osservi che le funzioni strettamente monotone sono iniettive e quindi, purché il codominio coincida con l'immagine, risultano invertibili.

Esercizio 3.58 *Siano A e B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to B$ invertibile. Dimostrare che*

1. *se f è crescente allora f^{-1} è crescente;*
2. *se f è decrescente allora f^{-1} è decrescente.*

1. Ricordiamo che f è crescente se e solo se

$$a_1, a_2 \in A,\ a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2).$$

Siano $b_1, b_2 \in B$ con $b_1 < b_2$. Se, per assurdo, risultasse $f^{-1}(b_1) > f^{-1}(b_2)$ allora, poiché f è crescente, si avrebbe

$$f(f^{-1}(b_1)) \geq f(f^{-1}(b_2)) \quad \Longleftrightarrow \quad b_1 \geq b_2$$

contro il fatto che $b_1 < b_2$.
2. Del tutto analogo al punto precedente.

Funzioni reali di variabile reale

Si chiamano *funzioni reali di una variabile reale* le funzioni che hanno come dominio e codominio dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Capitolo 4

Cardinalità

Il paradosso dell'hotel infinito

Immaginiamo un comune albergo, con un numero finito di camere, tutte occupate da clienti. Quando, una mattina presto, arriva un forestiero a chiedere una camera, il proprietario è costretto a mandarlo via con la consueta espressione: "Spiacente. Nessuna libera. In questo caso siamo di fronte a una difficoltà, non a un paradosso.

Immaginiamo ora l'hotel più grande di tutti, l'hotel infinito, in cui si trovi un numero infinito di stanze, ciascuna delle quali sia occupata. Supponiamo si presenti un viaggiatore a chiedere una camera. "Spiacente, siamo al completo, dice allegramente il proprietario, "ma posso siciuramente trovarle una sistemazione. Che cosa pensa di fare il proprietario per alloggiare il nuovo arrivato e sciogliere la contraddizione presente nella sua affermazione?

Immaginiamo ancora che, nello stesso giorno, si verifichi un nuovo fatto impossibile. Questa volta, sul mezzogiorno, arriva una gran massa di congressisti (presumibilmente da un universo parallelo) e il proprietario si trova di fronte a un numero infinito di nuovi ospiti che chiedono di sistemarsi. Essendo un furbo uomo d'affari, egli pensa che se potesse accogliere tutti i nuovi arrivati farebbe una fortuna. Che cosa può fare?

Questo paradosso fu formulato per la prima volta, nel 1920, dal matematico tedesco David Hilbert. Per procurare una camera a ciascun ospite, propose Hilbert, il proprietario dovrebbe spostare *l'ospite che occupa la camera 1 nella camera 2, poi l'ospite della camera 2 nella camera 3, quello della camera 3 nella camera 4, e così via all'infinito. Quindi il nuovo ospite può essere accompagnato dal fattorino nella camera 1, che ora è libera per via degli spostamenti. "È stato relativamente semplice, sorride l'astuto proprietario, soddisfatto di aver dovuto spostare ogni ospite solo di una camera.*

Il secondo problema del proprietario sembra molto più complicato. Se sistema il numero infinito dei nuovi ospiti uno alla volta, come nel caso precedente, li accontenterà tutti; tuttavia i vecchi ospiti saranno certamente scontenti di essere continuamente spostati in una camera nuova. Hilbert propose la seguente soluzione per il problema del proprietario: spostare il vecchio ospite della camera 1 nella camera 2, quello della camera 2 nella camera 4, quello della camera 3 nella camera 6, quello della camera 4 nella camera 8, e così via all'infinito. Questi cambiamenti porteranno tutti gli infiniti ospiti precedenti nella camere pari. Il proprietario sarà allora in grado di sistemare il numero infinito di nuovi ospiti nelle camere dispari.

Nicholas Falletta "Il libro dei Paradossi.

Il paradosso dell'equinumerosità

È chiaro l'esistenza di un'applicazione biiettiva tra insiemi con un numero finito di elementi implica che i due insiemi hanno in effetti lo stesso numero di elementi. Nel caso in cui il numero di elementi dei due insiemi non sia finito le cose si complicano. Infatti la mappa $n \mapsto 2n$ è biiettiva da $\mathbb{N}$ nel sottoinsieme proprio dei numeri naturali pari. L'idea paradossale che un insieme ed un suo sottoinsieme proprio possano avere "la stessa quantità di elementi ha tenuto in scacco i matematici dall'antichità (paradossi di Zenone) fino al 1873, anno in cui Georg Cantor espose la sua teoria sui numeri transfiniti. Va detto tuttavia che, nonostante la teoria di Cantor sia oggi universalmente conosciuta come il prodotto di uno straordinario genio matematico, molti matematici del suo tempo lo contrastarono apertamente. Un contemporaneo francese, Henri Poincaré, ad esempio, definì il lavoro di Cantor "una follia. Fu solo attorno al 1920 che l'opinione dei matematici cominciò a cambiare.

Equipotenza

Definizione 4.1 *Due insiemi A e B si dicono* equipotenti *(oppure* aventi la stessa cardinalità*) se possono essere messi in corrispondenza biunivoca, cioè se esiste un'applicazione biiettiva $\varphi : A \to B$. Si scrive allora $\#(A) = \#(B)$.*

Abbiamo visto nell'Esempio 3.49 che insiemi finiti con un numero diverso di elementi non possono essere messi in corrispondenza biunivoca, mentre è chiaro che un'applicazione biiettiva può sempre essere data tra insiemi con lo stesso numero di elementi.

Esempio 4.2 Gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$ sono equipotenti.

Osservazione 4.3 Nell'insieme delle parti di un insieme U l'equipotenza è una relazione di equivalenza. Ogni classe di equivalenza si chiama *numero cardinale* e l'insieme quoziente è l'*insieme dei numeri cardinali*. Indicheremo con $\#(A)$ la classe di A. Si osservi che ciò è in accordo con la Definizione 4.1.

Esempio 4.4 Siano A e B gli insiemi dell'esempio precedente. Essi appartengono alla stessa classe di equivalenza. Questa classe è il numero cardinale 5. Scriveremo quindi, ad esempio, $\#(B) = 5$.

Insiemi finiti e infiniti

Definizione 4.5 *Un insieme A si dice finito se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che A è equipotente a $N_n = \{1, \ldots, n\}$. Diremo che $\#(A) = n$. L'insieme A si dice infinito se non è finito.*

Esempio 4.6 Sia $n \in \mathbb{N}$. L'insieme N_n è finito e $\#(N_n) = n$.

Insiemi numerabili

Definizione 4.7 *Un insieme A si dice* numerabile *se $\#(A) = \#(\mathbb{N})$.*

È evidente che ogni insieme numerabile è infinito. Gli elementi di un insieme numerabile si possono "numerare, cioè rappresentare nella forma

$$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Esempio 4.8 Sia P l'insieme dei naturali pari. Si ha $\#(P) = \#(\mathbb{N})$.

Esempio 4.9 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *è numerabile.*

Più in generale vale la seguente proprietà.

Proposizione 4.10 *Se X ed Y sono insiemi numerabili allora $X \times Y$ è numerabile.*

Dimostrazione Esercizio.

Proposizione 4.11 *L'unione di una famiglia numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Esempio 4.12 L'insieme delle frazioni $Q = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ è numerabile.

A questo punto si potrebbe essere portati a pensare che tutti gli insiemi infiniti abbiano la stessa cardinalità, ma è subito visto che non è così.

Esempio 4.13 L'insieme S delle funzioni $s : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, cioè l'insieme delle successioni di cifre decimali, non è numerabile.

Se infatti lo fosse allora sarebbe possibile mettere i suoi elementi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, cioè disporli in successione nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} s^0 = (a_0^0, a_1^0, a_2^0, a_3^0, \ldots) \\ s^1 = (a_0^1, a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s^n = (a_0^n, a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Mostriamo che in questo modo non si può coprire tutto S , cioè che questa funzione da $\mathbb{N}$ in S non può essere suriettiva, esibendo una successione s che non può stare tra quelle sopra elencate; basta prendere $s = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ con $b_0 \neq a_0^0$ e

$$b_n = \begin{cases} 7 & \text{se } a_n^n \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ 2 & \text{se } a_n^n \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \end{cases}$$

per ogni naturale $n \geq 1$. Questo s non può essere uguale a s^0 perchè differisce nella prima cifra, e non può essere uguale ad s^n per alcun $n \geq 1$ perchè differisce nell'n-esimo elemento a_n^n. $\square$

Poichè $\mathbb{N}$ è totalmente ordinato e $\#(N_n) = n$, anche l'insieme dei cardinali finiti risulta totalmente ordinato. Vale inoltre la seguente proprietà (di monotonia): *se A è un insieme finito, e $C \subseteq A$ allora $\#(C) \leq \#(A)$.* L'ordinamento si può poi estendere a tutti i numeri cardinali dicendo che

$$\#(C) \leq \#(A) \iff \text{esiste un'applicazione iniettiva } \varphi : C \to A.$$

Si verifica facilmente che si tratta di una relazione d'ordine e che sui cardinali finiti coincide con quella indotta da $\mathbb{N}$.

La definizione cantoriana di infinito

Vale la seguente caratterizzazione degli insiemi infiniti, sulla quale però non tutti i matematici sono d'accordo perchè fa uso dell'assioma della scelta[1] che non è accettato da tutti.

Teorema 4.14 *Sia A un insieme. Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

1. *A è infinito;*
2. *A contiene un sottoinsieme numerabile;*
3. *A è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.*

Grazie a questo teorema, si sarebbe potuto procedere in maniera diversa per definire gli insiemi finiti, e cioè:

1. definizione: A è infinito se ha la stessa cardinalità di un suo sottoinsieme proprio;
2. definizione: A è finito se non è infinito;
3. si potrebbe *definire* $\mathbb{N}$ come l'insieme dei cardinali finiti.

Esistenza di cardinalità grandi

Teorema 4.15 *Per ogni insieme X si ha $\#(X) < \#(\wp(X))$.*

[1] Assioma della scelta: data una partizione $\mathcal{F}$ di un insieme A non vuoto, esiste un sottoinsieme $S \subseteq A$ tale che $\#(S \cap X) = 1$ per ogni $X \in \mathcal{F}$.

DIMOSTRAZIONE L'applicazione

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \wp(X) \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

è iniettiva, pertanto $\#(X) \leq \#(\wp(X))$. Basta dunque dimostrare che non vale $\#(X) = \#(\wp(X))$. Supponiamo per assurdo che valga l'uguaglianza. Allora esiste una biiezione $\varphi : X \to \wp(X)$. Consideriamo l'insieme

$$D = \{x \in X \ : \ x \notin \varphi(x)\}.$$

Si ha $D \in \wp(X)$. Allora per la suriettività di φ esiste $x_D \in X$ tale che $\varphi(x_D) = D$. Ma allora si hanno le seguenti possibilità:

1. $x_D \in D$; per definizione di D allora $x_D \notin \varphi(x_D) = D$, contro l'ipotesi;

2. $x_D \notin D$; per definizione di D allora $x_D \in \varphi(x_D) = D$, contro l'ipotesi.

Non può dunque valere il segno di uguale nella disuguaglianza, e l'asserto è provato. □

L'ipotesi del continuo

Assioma *Non esiste alcun insieme con cardinalità strettamente compresa tra $\#(\mathbb{N})$ e $\#(\wp(\mathbb{N}))$.*

Tale assioma è accettato da molti matematici ma rifiutato da altri, a differenza dell'Assioma della Scelta che è accettato da quasi tutti. È stato dimostrato che l'ipotesi del continuo (come pure l'assioma della scelta) non è dimostrabile, né è dimostrabile la sua negazione, quindi esistono due matematiche, una con l'ipotesi del continuo, e l'altra senza.

Capitolo 5

I numeri reali

Mi sembra necessario spiegargli il fatto della claustrofobia. "Sai cosa c'è alla base della matematica? dico. "Alla base della matematica ci sono i numeri. Se qualcuno mi chiedesse che cosa mi rende davvero felice, io risponderei: i numeri. La neve, il ghiaccio e i numeri. E sai perchè?

Spacca le chele con uno schiaccianoci e ne estrae la polpa con una pinzetta curva.

"Perchè il sistema numerico è come la vita umana. Per cominciare ci sono i numeri naturali. Sono quelli interi e positivi. I numeri del bambino. Ma la coscienza umana si espande. Il bambino scopre il desiderio, e sai qual'è l'espressione matematica del desiderio?

Versa nella zuppa la panna e alcune gocce di succo d'arancia.

"Sono i numeri negativi. Quelli con cui si dà forma all'impressione che manchi qualcosa. Ma la coscienza si espande ancora e cresce, e il bambino scopre gli spazi intermedi. Fra le pietre, fra le parti di muschio sulle pietre, fra le persone. E fra i numeri. Sai questo a cosa porta? Alle frazioni. I numeri interi più le frazioni danno i numeri razionali. Ma la coscienza non si ferma lì. Vuole superare la ragione. Aggiunge un'operazione assurda come la radice quadrata. E ottiene i numeri irrazionali.

Scalda il pane nel forno e mette il pepe in un macinino.

"È una sorta di follia. Perchè i numeri irrazionali sono infiniti. Non possono essere scritti. Spingono la coscienza nell'infinito. E

addizionando i numeri irrazionali ai numeri razionali si ottengono i numeri reali.

Sono finita al centro della stanza per trovare posto. È raro avere la possibilità di chiarirsi con un'altra persona. Di norma bisogna combattere per avere la parola. Questo per me è molto importante.

"Non finisce. Non finisce mai. Perchè ora, su due piedi, espandiamo i numeri reali con quelli immaginari, radici quadrate dei numeri negativi. Sono numeri che non possiamo figurarci, numeri che la coscienza normale non può comprendere. E quando aggiungiamo i numeri immaginari ai numeri reali abbiamo i sistemi numerici complessi. Il primo sistema numerico all'interno del quale è possibile dare una spiegazione soddisfacente della formazione dei cristalli di ghiaccio. È come un grande paesaggio aperto. Gli orizzonti. Ci si avvicina a essi e loro continuano a spostarsi. È la Groenlandia, ciò di cui non posso fare a meno! È per questo che non voglio essere rinchiusa.

Peter Høeg: Il senso di Smilla per la neve.

Operazioni binarie

Definizione 5.1 *Si chiama* operazione (binaria) *su un insieme A ogni funzione che ha come dominio $A \times A$ e codominio A.*

Se $T : A \times A \to A$ è un'operazione su A si scriverà usualmente xTy in luogo di $T(x, y)$.

Definizione 5.2 *Siano A e B due insiemi dotati rispettivamente delle operazioni $\heartsuit$ e $\diamondsuit$. Dicesi* isomorfismo *tra A e B ogni applicazione biiettiva $f : A \to B$ che "conserva le operazioni cioè gode della proprietà*

$$f(x \heartsuit y) = f(x) \diamondsuit f(y).$$

Numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali potrebbe essere introdotto assiomaticamente (Assioma di Peano) ma, almeno per ora, per noi saranno semplicemente quei numeri che derivano dalla nozione intuitiva del contare (concetto primitivo), cioè

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Non tutti sono d'accordo sul fatto di considerare naturale lo zero, per cui su alcuni testi si può trovare che $0 \notin \mathbb{N}$.[1]

Le operazioni che si possono fare con i numeri naturali sono somme e prodotti, ma non si possono fare le sottrazioni. Per poter fare l'operazione di sottrazione si deve introdurre la nozione di numero negativo e cioè ampliare l'insieme dei numeri di cui disponiamo introducendo i numeri interi.

Numeri interi

L'insieme degli interi può essere pensato intuitivamente come l'unione dell'insieme dei numeri naturali e dei loro *opposti*, cioè

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Anzichè considerare anche gli interi come primitivi, essi possono essere costruiti a partire dai numeri naturali. Precisamente $\mathbb{Z}$ si definisce come insieme quoziente di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rispetto alla relazione di equivalenza

$$(m, n) \sim (p, q) \iff m + q = n + p,$$

insieme in cui è possibile definire in maniera rigorosa le operazioni di somma e prodotto, e gli elementi inversi rispetto alla somma (opposti). Per rendersi conto del perchè la relazione di equivalenza venga definita in questo (apparentemente strano) modo è utile osservare, informalmente, che la classe di equivalenza $[(m, n)]$ può essere pensata come il numero intero $m - n$, e che (p, q) appartiene alla stessa classe se e solo se $p - q = m - n$ (ma non potevamo dire così perchè avremmo dovuto usare il segno $-$ che non è ancora stato definito).

La *somma* in $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\sim$ si definisce

$$[(m_1, n_1)] + [(m_2, n_2)] := [(m_1 + m_2, n_1 + n_2)];$$

verificare per esercizio che questa è una definizione *ben posta,* cioè che non dipende dai rappresentanti della classe.

[1] Mentre le prime fonti relative alla matematica babilonese risalgono ai primi secoli del secondo millennio AC, lo zero sembra comparire non prima del 300 AC (vedi C.B. Boyer "Storia della matematica", Oscar Mondadori).

L'*opposto* in $\mathbb{Z}$ si definisce

$$-[(m,n)] := [(n,m)]$$

(verificare la buona positura della definizione e che si ha $[(m,n)]+(-[(m,n)]) = [(0,0)]$).

Il *prodotto* in $\mathbb{Z}$ si definisce

$$[(m_1,n_1)] \cdot [(m_2,n_2)] := [(m_1m_2 + n_1n_2, m_1n_2 + m_2n_1)]$$

Anche qui occorre verificare che la definizione è ben posta. Disegnare graficamente su $\mathbb{N}^2$ le classi di equivalenza.

Con questi numeri possiamo fare le operazioni di somma, prodotto, sottrazione, ma non possiamo fare le divisioni. Perciò è necessario introdurre la nozione di *inverso* o *reciproco* di un numero intero introducendo le *frazioni*, cioè i numeri razionali.

Numeri razionali

L'insieme dei numeri razionali può essere pensato come l'insieme dei numeri che si rappresentano sottoforma di frazioni

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Il termine "razionale deriva dal latino *ratio* che significa rapporto. Più formalmente però $\mathbb{Q}$ può essere costruito partendo dall'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi considerando la relazione su $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$$(p,q) \sim (r,s) \iff ps = qr$$

(basta pensare alla coppia (p,q) come a p/q). Verificare che si tratta di una relazione di equivalenza; definiamo allora

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times(\mathbb{Z} \setminus \{0\})/ \sim .$$

Si definiscono poi (verificare la buona positura delle definizioni)

somma: $[(p_1,q_1)] + [(p_2,q_2)] := [(p_1q_2 + p_2q_1, q_1q_2)]$;

opposto: $-[(p,q)] := [(-p,q)]$;

prodotto: $[(p_1,q_1)] \cdot [(p_2,q_2)] := [(p_1p_2, q_1q_2)]$

inverso: $[(p,q)]^{-1} := [(q,p)]$ (solo se $p \neq 0$).

Rappresentare graficamente le classi di equivalenza.

Si può pensare a $\mathbb{Z}$ come a quel sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ costituito dalle frazioni con denominatore uguale a 1. Il difetto di $\mathbb{Q}$ è che non è sempre possibile fare l'operazione di estrazione della radice quadrata. Infatti vale il seguente teorema.

Teorema 5.3 *Non esiste alcun numero razionale (positivo) x tale $x^2 = 2$ (cioè $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).*

Dimostrazione Supponiamo dunque che la tesi sia falsa, cioè che, per assurdo, esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$; allora esisterebbero due interi positivi tali che

$$x = \frac{m}{n}.$$

Possiamo inoltre supporre che questi due numeri m ed n siano *primi tra loro*, cioè che non abbiano divisori comuni diversi dall'unità (ossia che la frazione sia "ridotta ai minimi termini). Elevando al quadrato ambo i membri e moltiplicando per n^2 si avrebbe allora

$$2n^2 = m^2$$

da cui segue che m^2 sarebbe pari e quindi anche m sarebbe pari (vedi l'Esercizio 1.3), cioè $m = 2k$, da cui $2n^2 = 4k^2$, cioè

$$n^2 = 2k^2.$$

Ma allora n^2 sarebbe pari, quindi n sarebbe pari come m, in contraddizione col fatto che m ed n sono primi tra loro. □

Tuttavia l'estrazione della radice quadrata di un numero positivo è un problema importante. Ad esempio, applicando il teorema di Pitagora, si vede che la lunghezza x della diagonale di un quadrato di lato unitario deve soddisfare l'equazione $x^2 = 2$. Poiché, d'altra parte, non esiste alcun numero razionale con questa proprietà, l'insieme dei numeri razionali non è sufficiente a esprimere una misura della lunghezza della diagonale del quadrato. Per questo si introducono i numeri reali.

Presentazione assiomatica dei numeri reali

Il modo assiomatico per introdurre i numeri reali consiste nel definire $\mathbb{R}$ come un insieme che ha certe particolari proprietà, da cui si deducono tutte le altre.

Proposizione 5.4 *Esiste ed è unico (a meno di isomorfismi) un insieme $\mathbb{R}$ verificante gli assiomi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$ seguenti.*

L'esistenza si ottiene "costruendo $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$ mentre l'unicità si dimostra con un teorema.

Assioma $\mathcal{A}_1$ (somma)

È definita in $\mathbb{R}$ un'operazione detta addizione*, denotata $+$, che gode delle seguenti proprietà*

1. **commutativa:** $a + b = b + a$ *per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$*;*
2. **associativa:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ *per ogni* $a, b, c \in \mathbb{R}$*;*
3. **zero:** *esiste un elemento, indicato con* 0*, tale che* $a + 0 = a$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *(si dimostra che è unico);*
4. **opposto:** *per ogni* $a \in \mathbb{R}$ *esiste un elemento di* $\mathbb{R}$*, indicato con* $-a$*, detto* opposto di a*, tale che* $a + (-a) = 0$ *(si dimostra che è unico).*

Un insieme verificante questo assioma si chiama *gruppo commutativo*. Quindi $\mathbb{R}$ con l'operazione di addizione è un gruppo commutativo. Un altro gruppo commutativo è, per esempio, $\mathbb{Z}$ con l'addizione di numeri interi.

Assioma $\mathcal{A}_2$ (prodotto)

È definita in $\mathbb{R}$ un'operazione detta moltiplicazione*, denotata $\cdot$, che gode delle seguenti proprietà*

1. **commutativa:** $a \cdot b = b \cdot a$ *per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$*;*
2. **associativa:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *per ogni* $a, b, c \in \mathbb{R}$*;*
3. **unità:** *esiste un elemento, indicato con* 1*, con* $1 \neq 0$*, tale che* $a \cdot 1 = a$ *per ogni* $a \in \mathbb{R}$ (si dimostra che è unico)*;*

4. **inverso:** *per ogni* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *esiste un elemento di* $\mathbb{R}$*, indicato con* a^{-1} *o con* $1/a$*, detto* inverso di a*, tale che* $a \cdot a^{-1} = 1$ *(si dimostra che è unico);*

5. **distributiva:** $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *per ogni* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Un insieme verificante gli assiomi $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ si chiama *corpo commutativo*. Quindi $\mathbb{R}$ con l'operazione di addizione e di moltiplicazione è un corpo. Un altro corpo commutativo è, per esempio, $\mathbb{Q}$ con l'addizione e la moltiplicazione di numeri razionali.

Assioma $\mathcal{A}_3$ (ordinamento)

È definita in $\mathbb{R}$ *una relazione d'ordine totale (indicata con il simbolo* $\leq$ *e che si legge "minore o uguale) che gode inoltre delle seguenti proprietà*

1. **compatibilità con la somma:** $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ *per ogni* $a, b, c \in \mathbb{R}$*;*

2. **compatibilità con il prodotto:** $a \leq b$ e $0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ *per ogni* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Un insieme verificante gli assiomi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$ si chiama *corpo commutativo ordinato*. Quindi $\mathbb{R}$ con l'operazione di addizione e di moltiplicazione è un corpo commutativo ordinato. Un altro corpo commutativo ordinato è, per esempio, $\mathbb{Q}$ con l'addizione e la moltiplicazione di numeri razionali e la relazione d'ordine $\leq$.

$a \leq b$ si legge talvolta: "b è maggiore o uguale di a e si scrive $b \geq a$. La scrittura $a < b$ significa che $a \leq b$ e a è diverso da b; si dice che "a è strettamente minore di b.

Assioma $\mathcal{A}_4$ (completezza)

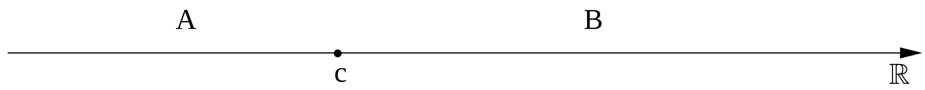
Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A *e* B *di* $\mathbb{R}$ *tali che*

$$a \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B,$$

esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$a \leq c \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e ogni } b \in B.$$

c *si chiama* elemento separatore *degli insiemi* A *e* B*. Si dimostra che se inoltre* $A \cup B = \mathbb{R}$*, allora l'elemento separatore è unico.*



Teorema 5.5 (di unicità) *Due insiemi verificanti $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$ sono isomorfi.*

Senza l'assioma di completezza non potremmo individuare $\mathbb{R}$ in maniera univoca, infatti anche $\mathbb{Q}$ verifica $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$. Ma $\mathbb{Q}$ non è completo come si vede considerando la coppia di insiemi

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{Q} \;:\; x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \;:\; x > 0,\ x^2 < 2\} \\
B &= \{x \in \mathbb{Q} \;:\; x \geq 0,\ x^2 \geq 2\}
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

di cui infatti non esiste un elemento separatore in $\mathbb{Q}$, perché se esistesse dovrebbe essere soluzione di $x^2 = 2$.

Costruzione di $\mathbb{R}$

Ora che sappiamo che i quattro assiomi possono individuare un solo insieme (a meno di isomorfismi), bisognerebbe mostrare che esiste almeno un insieme **non vuoto** che li soddisfa. I tre modi più noti in letteratura per costruire $\mathbb{R}$ sono:

1. successioni di intervalli (Cantor): relazione di equivalenza sulle successioni di intervalli;

2. completamento di $\mathbb{Q}$ (Cauchy): relazioni di equivalenza sulle successioni di Cauchy;

3. sezioni di $\mathbb{Q}$ (Dedekind): in maniera diretta (senza equivalenza).

Accenniamo brevemente al terzo.

Definizione 5.6 *Una* sezione *di $\mathbb{Q}$ è un sottoinsieme A di $\mathbb{Q}$ tale che*

(i) $A \neq \varnothing$ *e* $A \neq \mathbb{Q}$*;*

(ii) $s \in A$ *e* $r < s \Rightarrow r \in A$*;*

(iii) *A non ha massimo.*

Definiamo $\mathbb{R}$ *come l'insieme di tutte le sezioni di* $\mathbb{Q}$.

A questo punto bisognerebbe definire opportunamente le operazioni e dimostrare tutte le proprietà elencate negli Assiomi $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{A}_4$.

Ad esempio mostriamo che è possibile definire su $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine totale. Se A_1 e A_2 sono due sezioni di $\mathbb{Q}$, diremo per definizione che

$$A_1 \leq A_2 \text{ se e solo se } A_1 \subseteq A_2; \tag{5.2}$$

si vede immediatamente che è una relazione d'ordine (verificarne le proprietà per esercizio). Mostriamo che è totale, cioè che

$$A_1, A_2 \text{ sezioni di } \mathbb{Q} \Rightarrow A_1 \leq A_2 \text{ o } A_2 \leq A_1.$$

Supponiamo che non si abbia $A_1 \subseteq A_2$; dobbiamo allora mostrare che $A_2 \subseteq A_1$. Sia dunque $a_2 \in A_2$ (dobbiamo provare che $a_2 \in A_1$). Se non è $A_1 \subseteq A_2$ allora esiste $a_1 \in A_1$ con $a_1 \notin A_2$; non può dunque essere $a_1 = a_2$. Non può nemmeno essere $a_1 < a_2$, perchè A_2 è una sezione (proprietà (ii)), e quindi risulta $a_2 > a_1$, da cui poichè A_1 è una sezione si ha $a_2 \in A_1$, come volevasi dimostrare.

Altre proprietà di $\mathbb{R}$

Dagli assiomi si deducono ulteriori proprietà di $\mathbb{R}$, come la già citata unicità degli elementi neutri 0 e 1, dell'opposto e dell'inverso. Tra le più importanti vi sono inoltre le seguenti.

Sottrazione

Utilizzando la proprietà 4. dell'assioma $\mathcal{A}_1$ della somma si può definire l'operazione di sottrazione tra due numeri reali a e b ponendo

$$a - b := a + (-b)$$

dove i due punti davanti all'uguale significano che al primo membro si deve dare il significato espresso dal secondo, dove si utilizzano solo cose già note come l'esistenza dell'opposto di un numero reale e la somma di due numeri reali.

Divisione

Analogamente al caso della sottrazione, utilizzando la proprietà 4. dell'assioma $\mathcal{A}_2$ del prodotto, si può definire l'operazione di divisione di un numero reale a per un numero reale $b \neq 0$ ponendo

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Legge di semplificazione della somma

$$a + b = a + c \ \Rightarrow \ b = c$$

Per dimostrarla si usano ripetutamente tutte le proprietà dell'assioma della somma, infatti

$$b \overset{\text{zero}}{=} b + 0 \underset{\text{opposto}}{=} b + [a + (-a)] \overset{\text{commutativa}}{=} [(-a) + a] + b \underset{\text{associativa}}{=}$$

$$= (-a) + (a + b) \overset{\substack{\text{ipotesi} \\ a+b=a+c}}{=} (-a) + (a + c) \underset{\text{associativa}}{=} [(-a) + a] + c \overset{\text{opposto}}{=} 0 + c \underset{\text{zero}}{=} c.$$

Legge di semplificazione del prodotto

$$a \cdot b = a \cdot c, \; a \neq 0 \;\Rightarrow\; b = c$$

Si dimostra in modo simile alla precedente usando l'assioma del prodotto. Provare a farlo per esercizio.

Legge di annullamento del prodotto

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \text{ o } b = 0$$

Proprietà invariantiva della divisione

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \qquad \text{per ogni } a, b, c \in \mathbb{R}, \; b \neq 0, \; c \neq 0$$

Regole del calcolo delle frazioni

Per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $b, d \neq 0$ si ha

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Altre proprietà

Tra le proprietà derivanti dagli assiomi vi sono anche le seguenti, di uso largamente comune:

$$
\begin{array}{ll}
-0 = 0; & 1^{-1} = 1; \\
-(-x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}; & (x^{-1})^{-1} = x \;\; \forall x \neq 0; \\
-(x + y) = (-x) + (-y) \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}; & (x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1} \;\; \forall x, y \neq 0; \\
(-x) \cdot (-y) = x \cdot y \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}; & (-1) \cdot x = -x \;\; \forall x \in \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Proprietà dell'ordinamento

$$x > 0 \iff x^{-1} > 0;$$

$$x \le y,\ y \le z \ \Rightarrow\ x \le z \ \text{(proprietà transitiva)};$$

$$x \le y \iff -x \ge -y;$$

$$0 \le x \le y,\ 0 \le x' \le y' \ \Rightarrow\ x \cdot x' \le y \cdot y';$$

$$\begin{array}{ll} \forall\, x, y \in \mathbb{R} & x > 0 \text{ e } y > 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y > 0, \\ & x > 0 \text{ e } y < 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y < 0, \\ & x < 0 \text{ e } y > 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y < 0, \\ & x < 0 \text{ e } y < 0 \ \Rightarrow\ x \cdot y > 0. \end{array}$$

Prodotti notevoli

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \qquad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2, \qquad (x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y), \qquad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

Intervalli

Dati due numeri reali a e b con $a < b$ si chiama intervallo aperto di estremi a e b l'insieme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ :\ a < x < b\}$$

e intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ :\ a \le x \le b\}.$$

Altri intervalli (semiaperti) di $\mathbb{R}$ sono gli insiemi

$$\begin{array}{l} [a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ :\ a \le x < b\} \\ ]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ :\ a < x \le b\}. \end{array}$$

Nei testi americani si usa anche scrivere (a, b) in luogo di $]a, b[$, $[a, b)$ in luogo di $[a, b[$, eccetera.

Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

Proposizione 5.7 *L'insieme dei numeri razionali è* denso *in $\mathbb{R}$, cioè per ogni coppia $a < b$ di numeri reali esiste un numero razionale r tale che $a < r < b$.*

Dimostrazione I sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$:

$$A = \{t \in \mathbb{Q} \ : \ t < a\}, \quad B = \{s \in \mathbb{Q} \ : \ s < b\}$$

sono sezioni di $\mathbb{Q}$ che rappresentano rispettivamente a e b. Per come abbiamo definito l'ordinamento in $\mathbb{R}$ (cfr. (5.2))

$$a < b \iff A \underset{\neq}{\subset} B$$

e quindi $B \setminus A \neq \varnothing$, ma $B \setminus A = \{r \in \mathbb{Q} \ : \ a \leq r < b\}$. Quindi esiste almeno un razionale r tale che $a \leq r < b$. Per ottenerne uno che sia strettamente maggiore di a basta applicare lo stesso ragionamento all'intervallo $]\frac{a+b}{2}, b[$. □

Esercizio 5.8 *Dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) è denso in $\mathbb{R}$, cioè che per ogni coppia $a < b$ di numeri reali esiste un numero irrazionale r tale che $a < r < b$.*

Se per assurdo ciò non fosse vero, esisterebbero $a < b$ tali che l'intervallo $]a, b[$ sarebbe tutto contenuto in $\mathbb{Q}$. Eventualmente restringendo l'intervallo, possiamo inoltre supporre che a e b siano razionali (infatti il centro dell'intervallo è razionale, e i punti medi tra il centro e gli estremi sono anch'essi razionali). Applicando una traslazione di $\dfrac{a+b}{2}$ si ottiene l'intevallo $]\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}[$ centrato in 0. Anche questo intervallo deve essere contenuto in $\mathbb{Q}$ perchè ogni suo elemento è del tipo

$$x - \frac{a+b}{2}, \text{ con } x \in]a, b[$$

e cioè somma di numeri razionali. Ma ciò è impossibile, perchè questo intervallo, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, contiene numeri del tipo $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ che sono irrazionali.

Rappresentazione decimale di un numero razionale

Osserviamo che

$$\begin{aligned}\frac{11}{4} &= \frac{8}{4}+\frac{3}{4} = 2+\frac{3}{4} = 2+\frac{30}{4}\frac{1}{10} = 2+(\frac{28}{4}+\frac{2}{4})\frac{1}{10}\\ &= 2+\frac{7}{10}+\frac{1}{20} = 2+\frac{7}{10}+\frac{5}{100} = 2.75\end{aligned}$$

questa è la *rappresentazione decimale* del numero razionale 11/4. Se proviamo a fare la stessa cosa con il numero 13/3 oppure con 19/6 il procedimento non ha termine e si ottiene

$$\frac{13}{3} = 4.3333333\ldots = 4.\overline{3}$$

$$\frac{19}{6} = 3.1666666\ldots = 3.1\overline{6}$$

Queste sono dette *rappresentazioni decimali periodiche*. Osserviamo che la rappresentazione decimale di un numero non è unica. Infatti si ha

$$1.\overline{0} = 0.\overline{9}$$

come ci si convince facilmente scrivendo

$$\begin{aligned}1 &= \frac{9}{10}+\frac{1}{10} = 0.9+\frac{1}{10}\\ &= \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{1}{100} = 0.99+\frac{1}{100}\\ &= \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{1}{1000} = 0.999+\frac{1}{1000}\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Allo stesso modo 11/4 si può rappresentare in uno dei due modi seguenti

$$\frac{11}{4} = 2.75\overline{0} = 2.74\overline{9}$$

Per chiarezza va puntualizzato che sono periodici quei numeri decimali che da un certo punto in poi sono costituiti dalla ripetizione di un gruppo fisso di cifre. Ad esempio

$$7.52698\overline{745609}$$

Si potrebbe poi dimostrare che ogni numero decimale periodico rappresenta un numero razionale.

Rappresentazione decimale e non numerabilità di $\mathbb{R}$

Si può dimostrare che ogni numero reale x si può rappresentare con un numero decimale

$$x = a_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$$

dove $a_0 \in \mathbb{Z}$ ed $\alpha_i \in \{0,\dots,9\}$ per $i \geq 1$. Inoltre tale scrittura è unica se si esclude che un allineamento decimale contenga solo la cifra 9 da un certo posto in poi. Nel caso in cui il numero sia irrazionale la sua rappresentazione decimale non è periodica.

L'esempio 4.13 mostra che l'insieme degli allineamenti infiniti di cifre decimali non è numerabile, pertanto $[0,1[$ non è numerabile e quindi $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Esercizio 5.9 *Dimostrare che* $\#(\mathbb{R}) = \#(]0,1[) = \#([0,1])$.

Esercizi

Esercizio 5.10 *Dimostrare che*[2] $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 5.11 *Dimostrare con esempi che la somma ed il prodotto di due numeri irrazionali può avere come risultato un numero razionale (al contrario di* $\mathbb{Q}$ *che invece è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di prodotto).*

Esercizio 5.12 *Dimostrare che* $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Se fosse $\sqrt{2} + \sqrt{3} = q \in \mathbb{Q}$ si avrebbe $2 + 3 + 2\sqrt{6} = q^2$ cioè $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ il che è falso: si prova come nel teorema 5.3 (si osservi che questo non segue però dal fatto che $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$ con $\sqrt{2}, \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; poiché il prodotto di due numeri irrazionali può essere razionale).

Esercizio 5.13 *Dimostrare che* $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 5.14 *Si provi con un esempio che il quadrato di un numero irrazionale può essere razionale. Dimostrare, poi, che* $(\sqrt[3]{2})^2 \notin \mathbb{Q}$.

[2] In generale, se $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ è un numero primo, allora $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$. Vedere, ad esempio, A. Facchini, Sussidiario di Algebra e Matematica Discreta, Decibel-Zanichelli, 1992, Esercizio 4.11.

Esempio: $\sqrt{2} \notin Q$ ma $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}$. Supponiamo per assurdo che $(\sqrt[3]{2})^2 \in \mathbb{Q}$. Allora esistono due numeri interi non nulli e primi tra loro p e q tali che $(\sqrt[3]{2})^2 = p/q$. Elevando ambo i membri al cubo si ha che $2^2 = p^3/q^3$ e quindi $q^3 2^2 = p^3$ quindi p^3 è pari. Ne consegue che anche p è pari, perché se fosse dispari anche p^3 (con un semplice calcolo) risulterebbe dispari. Allora esiste un numero intero m tale che $p = 2m$ e vale l'uguaglianza $q^3 2^2 = 2^3 m^3$, cioè $q^3 = 2m^3$ pertanto anche q^3, e quindi q, risulterebbero pari, contro il fatto che p e q sono non nulli e primi tra loro.

Esercizio 5.15 *Dimostrare che* $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Se fosse $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = q \in \mathbb{Q}$ si avrebbe

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = (q - \sqrt{5})^2$$

cioè

$$2 + 3 + 2\sqrt{6} = q^2 + 5 - 2q\sqrt{5}$$

da cui $\sqrt{6} + q\sqrt{5} = p \in \mathbb{Q}$. Ma allora, elevando al quadrato, si ha

$$6 + 5q^2 + 2q\sqrt{30} \in \mathbb{Q},$$

quindi $\sqrt{30} \in \mathbb{Q}$ (perché è $q \neq 0$) e ciò è falso. Si prova come nel Teorema 5.3.

Esercizio 5.16 *Siano a e b numeri razionali non negativi. Dimostrare le seguenti proposizioni.*

1. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$;
2. $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q} \quad \not\Rightarrow \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$;
3. $\sqrt{ab} \notin \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

1. Per ipotesi $\sqrt{a} + \sqrt{b} = q \in \mathbb{Q}$. Si ha

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = q^2 \quad \Rightarrow \quad a + 2\sqrt{ab} + b = q^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ab} = \frac{q^2 - a - b}{2}$$

e poichè a, b e q sono razionali e $\mathbb{Q}$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto, allora $\sqrt{ab} = \dfrac{q^2 - a - b}{2} \in \mathbb{Q}$.
2. Basta prendere $a = b = 2$. Infatti $\sqrt{ab} = 2 \in \mathbb{Q}$ mentre invece $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. È equivalente a *1.*, già dimostrata.

Capitolo 6

Insiemi limitati

Estremo superiore e inferiore

Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato.

Definizione 6.1 *Sia $A \subseteq X$. Si chiama* maggiorante *di A ogni $x \in X$ tale che*

$$x \geq a \text{ per ogni } a \in A.$$

A si dice limitato superiormente *se esiste almeno un maggiorante. Si chiama* minorante *di A ogni $x \in X$ tale che*

$$x \leq a \text{ per ogni } a \in A.$$

A si dice limitato inferiormente *se esiste almeno un minorante. A si dice* limitato *se è limitato sia superiormente che inferiormente.*

Esempio 6.2 Nel caso in cui $X = (\mathbb{R}, \leq)$ si ha, ad esempio, che $[-2, 3]$ e $]-3, 2] \cup [5, 12[$ sono sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$; $]-\infty, 4]$ è limitato superiormente ma non inferiormente, $A = \mathbb{N}$ è limitato inferiormente ma non superiormente, $A = \mathbb{Z}$ non è limitato nè inferiormente nè superiormente.

Definizione 6.3 *Sia $A \subseteq X$. Il minimo (se esiste) dei maggioranti di A si chiama* estremo superiore *di A e si indica con* $\sup A$*; il massimo (se esiste) dei minoranti di A si chiama* estremo inferiore *di A e si indica con* $\inf A$.

Teorema 6.4 *Sia $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. Allora esiste (ed è unico) l'estremo superiore di A.*

Dimostrazione L'unicità segue dal fatto che $\mathbb{R}$ è ordinato, e quindi anche l'insieme (non vuoto) dei maggioranti di A è ordinato, e un insieme ordinato non può avere più di un minimo (vedi l'Esercizio 3.37). Dimostriamo l'esistenza. Consideriamo l'insieme

$$M = \{y \in \mathbb{R} \ : \ y \text{ è un maggiorante di } A\};$$

allora gli insiemi A ed M verificano le condizioni dell'assioma di completezza, e quindi esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq c \leq y \text{ per ogni } a \in A \text{ e } y \in M.$$

Ne consegue che c è il minimo dei maggioranti, e quindi estremo superiore di A. □

Il teorema ora dimostrato è, in effetti, equivalente all'assioma di completezza (dimostrarlo per esercizio). Un teorema analogo vale per l'estremo inferiore.

Notiamo che il sup e l'inf di un insieme A possono non appartenere ad A, ma se vi appartengono sono rispettivamente massimo e minimo, cioè

$$\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$$

$$\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A.$$

Se A non è superiormente limitato si pone $\sup A = +\infty$ e se non è inferiormente limitato si pone $\inf A = -\infty$.

Esempio 6.5 L'intervallo $[a, b]$ è un insieme limitato: b è un maggiorante di $[a, b]$ e a è un minorante. Inoltre b è il più piccolo dei maggioranti per cui è l'estremo superiore. Analogamente a è l'estremo inferiore. Poiché $a, b \in A$ tali elementi sono rispettivamente anche il minimo ed il massimo di $[a, b]$.

L'insieme $]a, b[$ ha ancora a, b rispettivamente come estremo inferiore e superiore. Tuttavia in questo caso tali numeri non appartengono all'insieme e dunque $]a, b[$ non possiede né massimo né minimo.

Esercizi

Esercizio 6.6 *Dimostrare che*

$$\sup\Big\{\frac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\Big\} = 1.$$

Intanto 1 è un maggiorante in quanto $\frac{n}{n+1} \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dobbiamo mostrare che è il più piccolo dei maggioranti. Se per assurdo esistesse un altro maggiorante $a < 1$ allora, prendendo $n > \frac{a}{1-a}$, risulterebbe $\frac{n}{n+1} > a$ e quindi a non sarebbe un maggiorante.

Esercizio 6.7 Calcolare estremi superiore e inferiore dell'insieme

$$\Big\{\frac{(-1)^n}{1+n^2} \ : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\Big\}.$$

Proprietà caratteristiche di sup e inf

Teorema 6.8 *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato superiormente. Si ha* $\sup A = M \in \mathbb{R}$ *se e solo se*

1. $\forall\, a \in A \quad a \leq M$;
2. $\forall\, \alpha < M\ \exists\, a_\alpha \in A \ : \ \alpha < a_\alpha$

DIMOSTRAZIONE La proprietà *1.* traduce in formule il fatto che M è un maggiorante. Mostriamo che la *2.* equivale a dire che M è il minimo dei maggioranti, cioè che non esistono maggioranti minori di M, cioè, in formule

$$\text{non}\,(\exists \alpha < M \ : \ \alpha \geq a\ \forall\, a \in A).$$

L'equivalenza si ottiene quindi ricordando come si negano le proposizioni in cui compaiono quantificatori. □

Osservazione 6.9 Notiamo che la proprietà *2.* si può anche esprimere con

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a_\varepsilon \in A \ : \ M - \varepsilon < a_\varepsilon.$$

Teorema 6.10 *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato inferiormente. Si ha* $\inf A = m \in \mathbb{R}$ *se e solo se*

1. $\forall\, a \in A \quad a \geq m$;
2. $\forall\, \alpha > m\ \exists\, a_\alpha \in A \ : \ a_\alpha < \alpha$.

La dimostrazione è analoga a quella della proposizione precedente.

Osservazione 6.11 Notiamo che la proprietà *2.* di quest'ultimo teorema si può anche esprimere con

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a_\varepsilon \in A \ : \ a_\varepsilon < m + \varepsilon.$$

Esercizio 6.12 *Calcolare l'estremo superiore e quello inferiore dell'insieme* $A = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ *con* $x_n = \dfrac{n^2-1}{4n^2+2}$ *e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.*

Si ha $x_1 = 0$, $x_2 = 1/6$, e $x_3 = 4/19, \dots$ Si osserva poi che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$\frac{n^2-1}{4n^2+2} \geq 0,$$

perciò 0 è un minorante, e poiché appartiene anche all'insieme A allora è estremo inferiore e minimo. Per quanto riguarda il sup si può osservare che

$$\frac{n^2-1}{4n^2+2} \leq \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

pertanto $1/4$ è un maggiorante. Proviamo che è anche estremo superiore. Ricorrendo alla proprietà 2 del teorema 6.8, a tal fine basta mostrare che se $a < 1/4$ allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{n^2-1}{4n^2+2} > a.$$

Infatti (e non è restrittivo considerare solo gli $a > 0$) basta prendere

$$n > \sqrt{\frac{2a+1}{1-4a}}$$

(si osservi che $1 - 4a > 0$). $\max A$ non esiste, perché $\sup A = 1/4 \notin A$ (dimostrarlo).

Radice n-esima aritmetica

Si potrebbe dimostrare che l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0, \ x^2 \leq 2\}$$

che esiste unico in $\mathbb{R}$ (per il teorema 6.4) poichè l'insieme è superiormente limitato, è l'unica soluzione positiva dell'equazione $x^2 = 2$ ed è detto *radice quadrata aritmetica di 2.* Questo fatto si può generalizzare provando che, se $a \geq 0$ ed $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste un'unica soluzione **non negativa** dell'equazione $x^n = a$. Essa si chiama *radice n-esima aritmetica di a* (denotata $\sqrt[n]{a}$). Può essere definita come l'estremo superiore dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0, \ x^n \leq a\}.$$

Funzioni limitate

Una funzione reale di variabile reale $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *limitata (inferiormente, superiormente)* se la sua immagine $f(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato (inferiormente, superiormente).

Useremo le notazioni

$$\sup_{x\in A} f(x) := \sup f(A) \quad \text{e} \quad \inf_{x\in A} f(x) := \inf f(A)$$

per indicare l'estremo superiore ed inferiore dei valori assunti dalla funzione. Se, in particolare, tali numeri appartengono all'insieme $f(A)$, ovvero sono valori assunti dalla funzione, si dirà che la funzione ammette *massimo* e *minimo* che verranno indicati con

$$\max_{x\in A} f(x) \quad \text{e} \quad \min_{x\in A} f(x)$$

o semplicemente con $\max\limits_A f$ e $\min\limits_A f$.

Esercizio 6.13 *Siano f e g due funzioni reali definite su uno stesso dominio (non vuoto) A. Dimostrare che valgono le seguenti disuguaglianze e mostrare, con esempi, che possono essere strette*

1. $\sup\limits_A (f+g) \leq \sup\limits_A f + \sup\limits_A g$*;*

2. $\inf\limits_A (f+g) \geq \inf\limits_A f + \inf\limits_A g$.

1. Poichè

$$f(x) \leq \sup_A f \quad \text{e} \quad g(x) \leq \sup_A g \quad \forall\, x \in A$$

allora

$$f(x) + g(x) \leq \sup_A f + \sup_A g \quad \forall\, x \in A,$$

cioè $\sup\limits_A f + \sup\limits_A g$ è un maggiorante di $f+g$, e siccome il sup è il più piccolo dei maggioranti allora

$$\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g$$

come volevasi dimostrare.

Se $A = [0,1]$, $f(x) = x$ e $g(x) = -x$ allora $\sup_A (f+g) = 0$ mentre $\sup_A f + \sup_A g = 1$ e pertanto vale la disuguaglianza stretta. Un'altro buon esempio è costituito dalle funzioni $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e $g(x) = \cos^2 x$ su $A = [0, 2\pi]$.

2. Si fa come la 1., con le ovvie modifiche.

Capitolo 7

Il principio di induzione

Un metodo dimostrativo molto utilizzato in matematica fa uso del seguente *principio di induzione*. Esso è una conseguenza dell'assioma di Peano che introduce l'insieme dei numeri naturali. Poichè i numeri naturali sono stati introdotti in maniera "ingenua, senza ricorrere all'assioma di Peano, assumiamo come assioma il principio di induzione, che quindi non necessita di dimostrazione.

Principio di induzione. *Sia P_n una successione di proposizioni ed $n_0 \in \mathbb{N}$. Supponiamo che*

i) P_{n_0} *sia vera;*

ii) $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ *per ogni numero naturale* $n \geq n_0$.

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Esercizio 7.1 *Dimostrare che*

1. $\forall d \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (1+d)^n \geq 1+nd$ *(disuguaglianza di Bernoulli);*

2. $\forall d \in]-1,0[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \quad (1+d)^n < \dfrac{1}{1-nd}$.

1. P_1 è vera, infatti per $n=1$ si ha $1+d = 1+d$. Mostriamo che $\forall n$ $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Per $n \in \mathbb{N}$ supponiamo dunque vera P_n e proviamo P_{n+1}. Si ha

$$(1+d)^{n+1} = (1+d)^n(1+d)$$

e poichè $1+d \geq 0$ (grazie all'ipotesi $d \geq -1$), allora per l'ipotesi di induzione (P_n è vera) si ha

$$(1+d)^n(1+d) \geq (1+nd)(1+d) = 1+(n+1)d+nd^2 \geq 1+(n+1)d$$

da cui segue che P_{n+1} è vera. Per il principio di induzione, allora, la disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 7.2 *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a \neq 1$ si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

(in questa formula si pone per convenzione $0^0 = 0$).

Esercizio 7.3 *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*

1. $1+2+\cdots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. Procediamo per induzione. Per $n = 1$ la formula è vera perchè si riduce a $1 = 1$. Per ipotesi di induzione la supponiamo vera per n e dimostriamo che vale per $n+1$, cioè che

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \frac{[(n+1)(n+2)]^2}{4}.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right] = (n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$

Fattoriale di un numero naturale

Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si denota con $n!$, detto n *fattoriale*, il prodotto dei primi n numeri naturali positivi, cioè

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Si pone per definizione $0! = 1$.

È possibile definire $n!$ *per induzione* (o *ricorrenza*) ponendo

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = (n-1)! \cdot n. \end{cases}$$

Coefficienti binomiali

Se $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, si denota con

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{(si legge “}n\text{ su }k\text{)}$$

Ricordando che $0! = 1$ si ha

$$\binom{0}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Esercizio 7.4 *Dimostrare che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k \geq 1$ vale la formula*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right] \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n-k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \end{aligned}$$

Formula del binomio (Newton)

> Il binomio di Newton è bello come la Venere di Milo.
> Il fatto è che pochi se ne accorgono.
> *Fernando Pessoa*

Vale, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, la formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

DIMOSTRAZIONE Procediamo per induzione. La formula è vera per $n = 0$. La supponiamo vera per n e la proviamo per $n+1$, cioè

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (b+a)(a+b)^n = (b+a)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}.
\end{aligned}$$

Si osserva ora che, mentre gli esponenti nella prima sommatoria sono già quelli desiderati, quelli della seconda si possono sistemare effettuando il cambiamento di indice $k+1 = h$ ($\iff$ $k = h-1$). In tal modo, e ripassando poi all'indice k, si ottiene infatti

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

avendo anche fatto uso di quanto ottenuto nel precedente Esercizio 7.4. Si osservi che

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

non è altro che il triangolo di Tartaglia.

Esercizio 7.5 *Dimostrare che per ogni numero naturale* $n \geq 4$ *vale la disuguaglianza*

$$2^n \geq n^2.$$

Esercizio 7.6 *Dimostrare che per ogni* $n \geq 6$ *si ha*

$$2^n n! \leq n^n$$

Per $n = 6$ è vero. Supposto vero per n, si ha

$$2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1)2^n n! \leq 2(n+1)n^n$$

quindi basta mostrare che $2n^n \leq (n+1)^n$, cioè che $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$; ma questo è ovvio in quanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \geq 1 + \frac{n}{n} = 2.$$

Esercizio 7.7 *Dimostrare che*

$$n! \geq 2^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Esercizio 7.8 *Dimostrare che*

$$n^n \leq 3^n n! \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

È vero per $n = 1$. Supposto vero per n si ha

$$3^{n+1}(n+1)! = 3(n+1)3^n n! \geq 3(n+1)n^n$$

quindi basta mostrare che $3n^n \geq (n+1)^n$, cioè che $3 \geq \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$; ma questo segue dagli esercizi 7.2 e 7.7 perchè

$$\begin{aligned}
\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{n^k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \ \text{(Esercizio 7.7)} \\
&\leq 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \ \text{(Esercizio 7.2)} \\
&= 1 + 2\big(1 - \frac{1}{2^n}\big) \leq 3.
\end{aligned}$$

Esercizio 7.9 *Dimostrare che per ogni $y \geq x \geq 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale la disuguaglianza*

$$y^n - x^n \leq (x+y)^{n-1}(y-x).$$

Per $n = 1$ è vero. Supposto vero per n si ha

$$\begin{aligned}
y^{n+1} - x^{n+1} &= (y^n - x^n)(y+x) + yx^n - xy^n \\
&\leq (x+y)^n(y-x) + xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \\
&\leq (x+y)^n(y-x).
\end{aligned}$$

Cardinalità delle parti di un insieme finito

Teorema 7.10 *Sia X un insieme finito di n elementi. Si ha*

$$\#\wp(X) = 2^n.$$

DIMOSTRAZIONE Procediamo per induzione. L'asserto é vero per $n = 0$. Supponiamolo vero per n e sia X un insieme di $n + 1$ elementi. Fissato $x_0 \in X$ si ha

$$\wp(X) = \{A \subseteq X \ : \ x_0 \notin A\} \cup \{A \subseteq X \ : \ x_0 \in A\}.$$

Poichè i due insiemi a secondo membro sono disgiunti e finiti, la cardinalità dell'unione è data dalla somma delle cardinalità. Avendosi

$$\begin{array}{l} \{A \subseteq X \ : \ x_0 \notin A\} = \wp(X \setminus \{x_0\}), \\ \{A \subseteq X \ : \ x_0 \in A\} = \big\{A \cup \{x_0\} \ : \ A \in \wp(X \setminus \{x_0\})\big\}, \end{array}$$

per l'ipotesi di induzione $\#\wp(X \setminus \{x_0\}) = 2^n$ e quindi entrambi gli insiemi hanno cardinalità 2^n, da cui $\wp(X)$ ha cardinalità $2^n + 2^n = 2^{n+1}$. $\square$

Capitolo 8

Equazioni, disequazioni e disuguaglianze

Equazioni

Siano X ed A due insiemi non vuoti ed $\alpha \in A$ (per esempio $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$). Data una funzione $f : X \to A$, *risolvere (in X)*[1] *l'equazione*

$$f(x) = \alpha$$

significa determinare i valori della variabile (se esistono) per i quali è soddisfatta l'*uguaglianza* $f(x) = \alpha$, cioè determinare l'insieme

$$S = \{x \in X \ : \ f(x) = \alpha\}.$$

Equazioni algebriche di primo e secondo grado

Esercizio 8.1 Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Risolvere (in $\mathbb{R}$) le equazioni

1. $ax + b = 0$;

2. $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Togliendo b ad ambo i membri si ha

$$ax = -b$$

[1] L'indicazione dell'insieme X in cui si cercano le soluzioni dell'equazione viene spesso omesso quando risulti chiaro dal contesto

e dividendo ambo i membri per a che è diverso da zero si ha

$$x = -\frac{b}{a}$$

che è l'unica soluzione dell'equazione.
2. Indichiamo con $p(x) = ax^2 + bx + c$. Si ha

$$\begin{aligned} p(x) &= a\big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\big) \\ &= a\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big] \\ &= a\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \big(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\big)\Big] \end{aligned}$$

e, posto $\Delta = b^2 - 4ac$ distinguiamo tre casi:

1) $\underline{\Delta > 0}$. Allora si ha $\Delta = \big(\sqrt{\Delta}\big)^2$ e dunque

$$\begin{aligned} p(x) &= a\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\big)^2\Big] \\ &= a\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big) - \big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\big)\Big]\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big) + \big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\big)\Big] \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

avendo posto $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Per la legge di annullamento del prodotto queste sono le uniche due soluzioni dell'equazione nel caso $\Delta > 0$.

2) $\underline{\Delta = 0}$. In tal caso

$$p(x) = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2$$

e, per la legge dell'annullamento del prodotto l'unica soluzione dell'equazione è

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) $\underline{\Delta < 0}$. In tal caso $-\Delta > 0$ e

$$p(x) = a\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 + \big(\frac{-\Delta}{4a^2}\big)\Big]$$

e non vi è dunque alcuna soluzione.

Riassumendo, l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha 2 soluzioni, una soluzione o nessuna soluzione a seconda del segno del *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$. Precisamente

- se $\Delta < 0$ non esistono soluzioni;
- se $\Delta \geq 0$ vi sono le soluzioni $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, che coincidono se $\Delta = 0$.

Esercizio 8.2 Risolvere (in $\mathbb{R}$) le equazioni

1. $3 - 2x = -1$;
2. $x^2 + x = 2$;
3. $x^2 + 5 = 2x$;
4. $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

Disequazioni

Sia X un insieme (non vuoto), $(A, \leq)$ un insieme ordinato (per esempio $A = \mathbb{R}$), ed $\alpha \in A$ (per esempio $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$). Data una funzione $f : X \to A$, *risolvere (in X) la disequazione*

$$f(x) \leq \alpha$$

significa determinare i valori della variabile (se esistono) per i quali è soddisfatta la *disuguaglianza* $f(x) \leq \alpha$, cioè determinare l'insieme

$$S = \{x \in X \ : \ f(x) \leq \alpha\}.$$

Esercizio 8.3 Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Risolvere (in $\mathbb{R}$) le disequazioni

1. $ax + b \geq 0$;
2. $ax + b > 0$;
3. $2x - 3 \leq 0$;
4. $2x - 3 < 0$.

1. Si ha

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq -\frac{b}{a}\} \qquad \text{se } a > 0,$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq -\frac{b}{a}\} \qquad \text{se } a < 0.$$

2. Si ha

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > -\frac{b}{a}\} \qquad \text{se } a > 0,$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < -\frac{b}{a}\} \qquad \text{se } a < 0.$$

Esercizio 8.4 Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Risolvere le disequazioni

1. $ax^2 + bx + c \geq 0$;
2. $ax^2 + bx + c > 0$;
3. $x^2 + x - 2 \leq 0$;
4. $x^2 + x - 2 < 0$.

1. Proponiamo due metodi di risoluzione. Nel primo, più rigoroso, si ragiona come nella risoluzione dell'equazione di secondo grado (esercizio 8.2). Il secondo, meno rigoroso ma di più facile applicazione, è basato su considerazioni geometriche.

Metodo Analitico. Indichiamo con $p(x) = ax^2 + bx + c$. Si ha

$$\begin{aligned} p(x) \quad &= a\big(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\big) \\ &= a\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\Big] \\ &= a\Big[\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 - \big(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\big)\Big] \end{aligned}$$

e, posto $\Delta = b^2 - 4ac$ distinguiamo tre casi:

1) $\underline{\Delta > 0}$. Allora si ha $\Delta = \big(\sqrt{\Delta}\big)^2$ e dunque

$$\begin{aligned} p(x) &= a\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 - \big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\big)^2\Big] \\ &= a\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big) - \big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\big)\Big]\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big) + \big(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\big)\Big] \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

avendo posto $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Consideriamo ora il sottocaso in cui:

$\underline{a > 0}$. Si ha

$$p(x) \geq 0 \iff (x-x_1 \geq 0 \text{ e } x-x_2 \geq 0) \text{ o } (x-x_1 \leq 0 \text{ e } x-x_2 \leq 0)$$

ed essendo $x_1 < x_2$, l'insieme delle soluzioni è

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq x_1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq x_2\}$$

cioè sono soluzioni i "valori esterni all'intervallo delle radici dell'equazione $p(x) = 0$.

$\underline{a < 0}$. Analogamente al caso precedente l'insieme delle soluzioni è (essendo $x_2 < x_1$)

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x_2 \leq x \leq x_1\}$$

cioè sono soluzioni i "valori interni all'intervallo delle radici dell'equazione $p(x) = 0$.

2) $\underline{\Delta = 0}$. In tal caso

$$p(x) = a\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2$$

e l'insieme delle soluzioni è

$$\begin{array}{ll} S = \mathbb{R} & \text{se } a > 0; \\ S = \{-\frac{b}{2a}\} & \text{se } a < 0. \end{array}$$

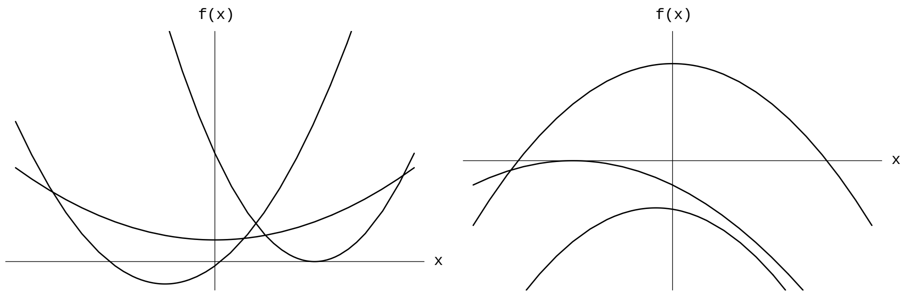
3) $\underline{\Delta < 0}$. In tal caso $-\Delta > 0$ e

$$p(x) = a\Big[\big(x+\frac{b}{2a}\big)^2 + \big(\frac{-\Delta}{4a^2}\Big]$$

e le soluzioni sono

$$\begin{array}{ll} S = \mathbb{R} & \text{se } a > 0; \\ S = \varnothing & \text{se } a < 0. \end{array}$$

Metodo grafico. Consiste nel riconoscere che il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una parabola, col vertice verso il basso se $a > 0$ e verso l'alto se $a < 0$ (vedi figura).



$a > 0$ $a < 0$

I punti di intersezione della parabola con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e possono quindi essere 2, 1 o nessuno. Indicato con $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante dell'equazione, con x_1 e x_2 le eventuali soluzioni dell'equazione, e con S l'insieme delle soluzioni della disequazione, si ha allora

- $\Delta < 0$, $a < 0 \Rightarrow S = \varnothing$;
- $\Delta < 0$, $a > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$;
- $\Delta = 0$, $a < 0 \Rightarrow S = \{-\frac{b}{2a}\}$;
- $\Delta = 0$, $a > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$;
- $\Delta > 0$, $a < 0 \Rightarrow S = [x_1, x_2]$;
- $\Delta > 0$, $a < 0 \Rightarrow S =]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.

2. Si ha

- $\Delta < 0$, $a < 0 \Rightarrow S = \varnothing$;
- $\Delta < 0$, $a > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$;
- $\Delta = 0$, $a < 0 \Rightarrow S = \varnothing$;

- $\Delta = 0$, $a > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$;
- $\Delta > 0$, $a < 0 \Rightarrow S =]x_1, x_2[$;
- $\Delta > 0$, $a < 0 \Rightarrow S =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.

Esercizio 8.5 Risolvere le disequazioni

1. $-x^2 + x + 2 > 0$;
2. $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$;
3. $x^4 - 2x^2 > 1$.

1. Si ha $\Delta = 9$, e le soluzioni dell'equazione $-x^2 + x + 2 = 0$ sono $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x < 2\} =]-1, 2[.$$

2. Equivale a

$$\frac{x-2}{x+3} - \frac{x+1}{x} < 0$$

e quindi, riducendo allo stesso denominatore e dividendo per -3 ambo i membri,equivale a

$$\frac{2x+1}{x(x+3)} > 0.$$

Sono dunque soluzioni gli $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano

$$\left\{\begin{array}{c} x > -\frac{1}{2} \\ x > 0 \\ x+3 > 0 \end{array}\right. \bigcup \left\{\begin{array}{c} x > -\frac{1}{2} \\ x < 0 \\ x+3 < 0 \end{array}\right. \bigcup \left\{\begin{array}{c} x < -\frac{1}{2} \\ x < 0 \\ x+3 > 0 \end{array}\right. \bigcup \left\{\begin{array}{c} x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \\ x+3 < 0 \end{array}\right.$$

e l'insieme delle soluzioni è dunque

$$S = \{x > 0\} \cup \{-3 < x < -\frac{1}{2}\} =]-3, -\frac{1}{2}[\cup]0, +\infty[.$$

Disuguaglianze

Un esempio molto semplice di disuguaglianza deriva dalla osservazione che il quadrato

$$(a-b)^2$$

è sempre positivo, e si annulla se e solo se $a = b$. Ne consegue che, sviluppando, si ha

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

dove l'uguaglianza sussiste se e solo se $a = b$. Quest'ultima caratteristica fa si che, in un certo senso, la disuguaglianza non sia "migliorabile. Disuguaglianze di questo genere sono spesso molto utili per risolvere problemi concreti, anche di natura geometrica, come il seguente.

Un problema isoperimetrico

Esercizio 8.6 *Tra tutti i rettangoli di fissato perimetro P, trovare quello che racchiude la massima area.*

Indicate con a e b le misure dei lati del rettangolo, con P il perimetro e con A l'area si ha

$$P = 2(a + b) \qquad A = ab.$$

Si ha dunque, utilizzando la disuguaglianza precedentemente stabilita,

$$P^2 = 4(a + b)^2 = 4(a^2 + b^2 + 2ab) \geq 4(2ab + 2ab) = 16ab = 16A$$

cioè, riassumendo,

$$16A \leq P^2;$$

per come è stata ottenuta, l'uguaglianza vale se e solo se $a = b$, cioè nel caso del quadrato. Tra tutti i rettangoli di fissato perimetro il quadrato ha dunque area massima.

Si potrebbe anche considerare il problema duale ("isodiametrico): – *tra tutti i rettangoli di fissata area trovare quello di perimetro minimo* –. La soluzione è di nuovo il quadrato.

Disuguaglianze tra media armonica, geometrica e aritmetica

Dati due numeri reali positivi a e b si chiama

media aritmetica di a e b il numero $\dfrac{a+b}{2}$,

media geometrica di a e b il numero $\sqrt{ab}$,

media armonica di a e b il numero $\dfrac{2ab}{a+b}$.

La media aritmetica ha questo nome per motivi aritmetici, in quanto è l'unico numero reale x ad avere ugual distanza da a e b, cioè è l'unica soluzione dell'equazione di primo grado

$$b - x = x - a \tag{8.1}$$

(si può pensare, per fissare le idee, al caso $a < b$).

La media geometrica si chiama così per motivi geometrici, in quanto rappresenta la lunghezza del lato del quadrato che ha la stessa area del rettangolo di lati a e b, cioè l'unica soluzione positiva dell'equazione di secondo grado

$$x^2 = ab.$$

La media armonica invece si chiama in questo modo per motivi "musicali". Essa ha infatti una sorprendente applicazione armonica[2]. Tutti coloro che hanno avuto a che fare con una chitarra sanno che quando una corda viene pizzicata essa vibra con una frequenza w proporzionale alla lunghezza ℓ della corda, cioè

$$w = \alpha\frac{1}{\ell}.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che la frequenza w, detta *fondamentale*, corrisponda alla nota *do*. Se consideriamo una corda lunga $\ell/2$, essa vibrerà con frequenza $2w$. Le note corrispondenti a w e $2w$ sono, come si dice in musica, *all'ottava*, cioè la nota corrispondente a $2w$ è esattamente l'ottava sopra di quella associata a w (si tratterà dunque ancora di un do, ma più acuto).

Se ora si prendono le lunghezze ℓ ed $\ell/2$ delle due corde, e se ne calcola la media armonica, si ottiene come risultato $\frac{2}{3}\ell$. La frequenza associata a questa nuova corda è $\frac{3}{2}w$, e questa non è una frequenza qualunque, ma la cosiddetta *quinta* della fondamentale (il *sol* della scala naturale). Se si prende poi l'ulteriore media armonica della corda lunga ℓ e di quella lunga $\frac{2}{3}\ell$ si ottiene la lunghezza $\frac{4}{5}\ell$ che corrisponde ad una frequenza $\frac{5}{4}w$, che è la frequenza relativa alla *terza maggiore* rispetto alla frequenza fondamentale w (il *mi* della scala naturale). Ora, e qui il termine "armonico è, non solo appropriato, ma quasi tassativo, se si sovrappongono le tre frequenze w, $\frac{3}{2}w$ e $\frac{5}{4}w$ si compone esattamente l'*accordo perfetto maggiore*, nella scala naturale, che è considerato il fondamento di tutta l'armonia occidentale (e non solo).

---

[2]Ringrazio il collega Fabio Alessi per la preziosa consulenza su questo argomento

Esercizio 8.7 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ e $b > 0$. Dimostrare che valgono le seguenti disuguaglianze tra le medie armonica, geometrica e aritmetica:*

$$\min\{a, b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \max\{a, b\}$$

e che si riducono ad uguaglianze se e solo se $a = b$.

Ricordiamo anzitutto che

$$x \leq y \quad \text{non equivale a} \quad x^2 \leq y^2$$

(non vale nessuna delle due implicazioni) mentre invece

$$0 \leq x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leq y^2 \quad \text{e} \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0.$$

Poiché $a > 0$ e $b > 0$ allora la prima disuguaglianza è equivalente a

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq (\sqrt{ab})^2, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \leq ab, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{4ab}{(a+b)^2} \leq 1, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4ab \leq (a+b)^2, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad (a > 0, b > 0)$$

e quest'ultima è vera. Inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

La seconda disuguaglianza è equivalente a

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4ab \leq (a+b)^2, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2, \quad (a > 0, b > 0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$2ab \leq a^2 + b^2, \quad (a > 0, b > 0)$$

che è vera, e vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

Esercizio 8.8 *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$*. Dimostrare che si ha*

$$\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}} \leq \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

e che la prima disuguaglianza si riduce ad un'uguaglianza se e solo se $a = b$*, mentre la seconda si riduce ad un'uguaglianza se e solo se* $a = 0$ *oppure* $b = 0$*.*

Poichè $a, b \geq 0$, le disuguaglianze sono equivalenti a

$$\left(\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \leq a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

cioè a

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \sqrt{ab} \leq a + b \leq a + b + 2\sqrt{ab}.$$

La prima disuguaglianza equivale alla nota disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

che è vera per ogni $a, b \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $a = b$.

La seconda disuguaglianza equivale a

$$0 \leq 2\sqrt{ab}$$

che è vera per ogni $a, b \geq 0$ e, per la legge di annullamento del prodotto, vale l'uguaglianza se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$.

Capitolo 9

Alcune funzioni elementari

Funzioni lineari

Sono tutte le funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ del tipo

$$f(x) = mx$$

dove m è un qualunque numero reale fissato. Con considerazioni geometriche ci si convince facilmente che queste funzioni hanno per grafico una retta passante per l'origine. Le funzioni lineari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sono le sole a godere delle proprietà

1. (omogeneità) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ per ogni $\lambda, x \in \mathbb{R}$;

2. (additività) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Anche le funzioni

$$f(x) = mx + q$$

dove m e q sono fissati numeri reali, hanno per grafico una retta (ma in generale non passante per l'origine) e per questo motivo sono spesso, anche se non correttamente, chiamate lineari; più correttamente si chiamano *affini*. Va osservato però che, se $q \neq 0$, esse non godono delle proprietà di omogeneità e additività.

Le funzioni lineari sono strettamente monotone (e quindi biiettive e invertibili) ogniqualvolta $m \neq 0$ mentre per $m = 0$ si riducono ad una funzione costante.

Potenze ad esponente intero, polinomi e funzioni razionali

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{cases} x^1 := x \\ x^n := x^{n-1} \cdot x \end{cases}$$

definisce, per induzione, x^n per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La funzione

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{array}$$

si chiama potenza di esponente n. Si è escluso volutamente il caso $n = 0$: la potenza di esponente 0 è definita come la costante 1 su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (non è quindi definito il simbolo 0^0).

Proprietà delle potenze ad esponente naturale

Valgono le seguenti proprietà, in cui $x, y \in \mathbb{R}$ e $n_1, n_2, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

1. $x^{n_1} \cdot x^{n_2} = x^{n_1+n_2}$,
2. $(x^{n_1})^{n_2} = x^{n_1 n_2}$,
3. $x^n y^n = (xy)^n$.

Dimostrarle per esercizio.

Definizione 9.1 *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice*

$$\begin{array}{ll} \textit{pari} & \textit{se } f(-x) = f(x) \textit{ per ogni } x \in \mathbb{R} \\ \textit{dispari} & \textit{se } f(-x) = -f(-x) \textit{ per ogni } x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Nel caso di una funzione pari i punti $(x, f(x))$ e $(-x, f(x))$ appartengono entrambi al grafico di f che pertanto risulta simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Se invece f è dispari i punti $(x, f(x))$ e $(-x, -f(x))$ appartengono entrambi al grafico di f che risulta simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Per esempio le potenze di esponente pari sono funzioni pari, quelle di esponente dispari sono funzioni dispari. Le figure riportano grafici qualitativi delle funzioni x^2 e x^3, rispettivamente.

Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è pari o a quello di x^3 se n è dispari.

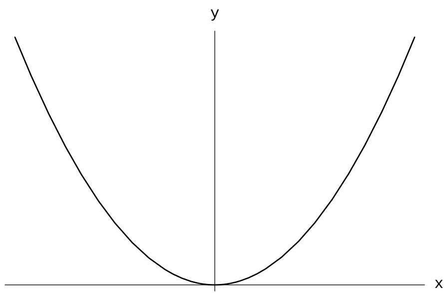


Grafico di x^2

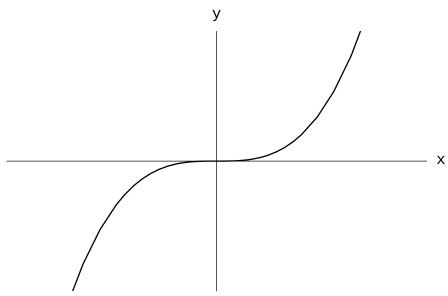


Grafico di x^3

Polinomi

Con le operazioni di somma e prodotto si costruiscono i *polinomi*, cioè le funzioni del tipo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \\ &\qquad\quad = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n \end{aligned}$$

dove $a_0, \ldots, a_n$ sono assegnati numeri reali.

Funzioni razionali

Le funzioni ottenute come quoziente di due polinomi

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

definite su $\{x \; : \; Q(x) \neq 0\}$, sono dette *funzioni razionali.*

Un esempio di funzione razionale è la potenza ad esponente intero, definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ da

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

Per le potenze ad esponente intero valgono ancora le proprietà 1., 2. e 3. sopra elencate, con $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n_1, n_2, n \in \mathbb{Z}$.

Radici e potenze ad esponente razionale

Radici

Consideriamo adesso il problema dell'invertibilità della potenza.
Se $n = 0$, la potenza x^0 è una funzione costante e dunque non invertibile.
Se $n = 1$, la potenza x^1 è la funzione identità e dunque invertibile con inversa uguale a se stessa.
Se $n = 2$, la potenza x^2 non è invertibile perchè non è iniettiva. Essa è però strettamente crescente nell'intervallo $[0, +\infty[$ (dimostrarlo per esercizio) e quindi la sua restrizione a questo intervallo risulta invertibile e la funzione inversa è detta *radice quadrata* di x e si denota col simbolo $\sqrt{x}$, cioè

$$\begin{aligned}[0, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto \sqrt{x}.\end{aligned}$$

Si noti che non sono quindi definite le radici quadrate dei numeri negativi.
Se $n = 3$, la potenza x^3 è strettamente crescente (dimostrarlo per esercizio) e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$ e la sua inversa, la *radice cubica* di x, è

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sqrt[3]{x}.\end{aligned}$$

In generale, se n è pari si ragiona come nel caso $n = 2$: la restrizione di x^n all'intervallo $[0, +\infty[$ è invertibile (mostrare per esercizio che è strettamente crescente) e la funzione inversa è detta *radice n-esima* di x e si denota col simbolo $\sqrt[n]{x}$, cioè

$$\begin{aligned}[0, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto \sqrt[n]{x}.\end{aligned}$$

Se n è dispari, la potenza di esponente n è invertibile su tutto $\mathbb{R}$ (mostrare per esercizio che è strettamente crescente) e la sua inversa è

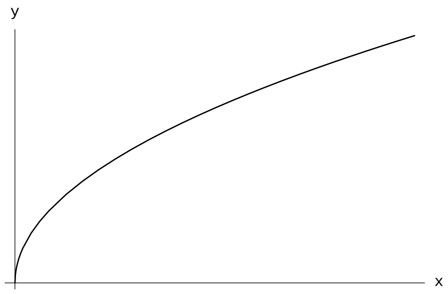
$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sqrt[n]{x}.\end{aligned}$$

Le figure riportano grafici qualitativi di $\sqrt[n]{x}$ per n pari e dispari, rispettivamente.

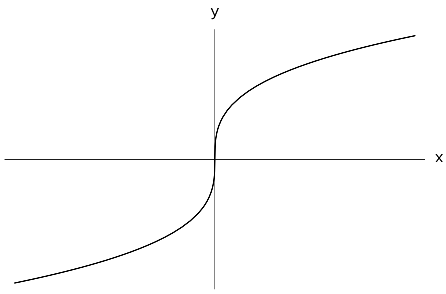
Siano $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $x > 0$. Definiamo la potenza di esponente razionale m/n come la funzione

$$x^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{x})^m. \tag{9.1}$$

Bisognerebbe a questo punto dimostrare che quella appena data è una buona definizione, cioè che non dipende dalla scelta del rappresentante del numero razionale m/n, e cioè che, se $m'/n' = m/n$ allora $(\sqrt[n']{x})^{m'} = (\sqrt[n]{x})^m$.



$\sqrt[n]{x}$ con n pari



$\sqrt[n]{x}$ con n dispari

Proposizione 9.2 *Sia* $x > 0$, $m, m' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n, n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *tali che*

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}.$$

Allora si ha

$$(\sqrt[n]{x})^m = (\sqrt[n']{x})^{m'}.$$

DIMOSTRAZIONE Per ipotesi $mn' = nm'$, quindi

$$x^{mn'} = x^{nm'}. \tag{9.2}$$

Per definizione si ha poi

$$x = (\sqrt[n]{x})^n = (\sqrt[n']{x})^{n'}$$

e quindi, sostituendo nella (9.2), si ha

$$\big((\sqrt[n]{x})^n\big)^{mn'} = \big((\sqrt[n']{x})^{n'}\big)^{nm'}$$

e, per la proprietà 2. si ha

$$(\sqrt[n]{x})^{nmn'} = (\sqrt[n']{x})^{n'nm'}$$

e, di nuovo per la 2.,

$$\big((\sqrt[n]{x})^m\big)^{nn'} = \big((\sqrt[n']{x})^{m'}\big)^{n'n}$$

da cui segue la tesi. $\square$

Proprietà delle potenze

Valgono le seguenti proprietà. Siano $x, y > 0$, $r_1, r_2, r \in \mathbb{Q}$

1. $x^{r_1} \cdot x^{r_2} = x^{r_1+r_2}$,
2. $(x^{r_1})^{r_2} = x^{r_1 r_2}$,
3. $x^r y^r = (xy)^r$,
4. $x^{-r} = 1/x^r$.

Dimostriamo la *1.* lasciando le altre per esercizio. Si osserva dapprima che essa vale per le potenze ad esponente naturale, dopodichè siano $r_1 = m_1/n$ ed $r_2 = m_2/n$ (NB: non è restrittivo assumere che le due frazioni abbiano lo stesso denominatore). Allora, per la definizione (9.1) e poichè $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, si ha

$$x^{r_1} \cdot x^{r_2} = (x^{1/n})^{m_1}(x^{1/n})^{m_2} = (x^{1/n})^{m_1+m_2} = x^{(m_1+m_2)/n} = x^{r_1+r_2}.$$

$\square$

Esercizio 9.3 *Dimostrare, usando le proprietà delle potenze, che valgono le seguenti identità*

1. $\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$;
2. $\sqrt[3]{2^2} = 2/\sqrt[3]{2}$;
3. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$;
4. $\sqrt[3]{5400} = 6\sqrt[3]{25}$;
5. $\sqrt[5]{352} = 2\sqrt[5]{11}$.

La funzione valore assoluto

Il *valore assoluto* (o *modulo*) di un numero reale x è definito da

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ed è quindi una funzione

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to [0, +\infty[\\ &x \mapsto |x|. \end{aligned}$$

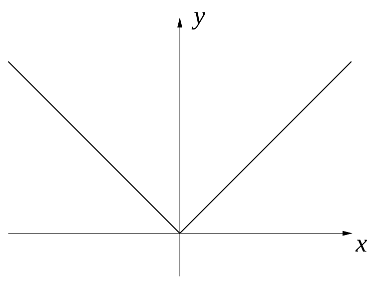


Grafico di $|x|$

Il seguente teorema riassume alcune delle più importanti proprietà del valore assoluto.

Teorema 9.4 *Il valore assoluto soddisfa le seguenti proprietà.*

1. $|x| \geq 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
2. $|x| = 0 \iff x = 0$*;*
3. $|x| = |-x|$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *(è una funzione pari);*
4. $|x|^2 = x^2$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
5. $\sqrt{x^2} = |x|$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;.*
6. $|xy| = |x|\,|y|$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$*;*
7. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $y \neq 0$*;*
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *(*disuguaglianza triangolare*);*
9. $|x - y| \geq ||x| - |y||$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione Le dimostrazioni di *1.–7.* vengono lasciate per esercizio.
Proviamo *8.* Osserviamo che

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$

mentre

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2,$$

quindi

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

e poichè la radice quadrata è una funzione crescente

$$\sqrt{|x + y|^2} \leq \sqrt{(|x| + |y|)^2}$$

che equivale alla tesi.
Proviamo *9.* Si ha

$$||x| - |y|| = \begin{cases} |x| - |y| & \text{se } |x| - |y| \geq 0 \\ |y| - |x| & \text{se } |x| - |y| < 0 \end{cases}$$

Osservato che

$$\begin{array}{l} |a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \\ |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow |b| - |a| \leq |a - b| \end{array}$$

si vede che in ogni caso vale la *9.*. □

Esercizio 9.5 Provare per induzione che

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9.6 *Dimostrare le seguenti proposizioni.*

1. $|x| \leq k \iff -k \leq x \leq k$;

2. $a \leq b + \varepsilon$ *per ogni* $\varepsilon > 0 \iff a \leq b$;

3. $x = 0 \iff |x| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$.

Esercizio 9.7 *Risolvere la disequazione*

$$|x + 3| - |2x - 1| \leq x + 1.$$

Esercizio 9.8 *Della seguente funzione, dire se è invertibile, e in caso affermativo trovare l'inversa. Altrimenti invertirne le restrizioni ad opportuni sottoinsiemi del dominio.*

$$f(x) = x|x|.$$

Esercizio 9.9 *Provare che una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *è limitata (vedi la definizione a pagina 63) se e solo se esiste* $M > 0$ *tale che*

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in A.$$

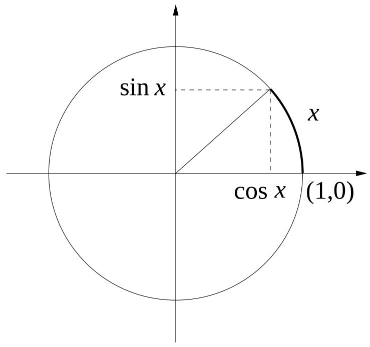
Funzioni circolari o trigonometriche

Funzioni periodiche

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *periodica di periodo* $T > 0$ se per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x + T) = f(x)$.

Si osserva che in tal caso si ha anche $f(x + 2T) = f(x + T) = f(x)$ ed in generale $f(x + kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni $k \in \mathbb{Z}$, cioè f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{Z}$. È quindi sufficiente conoscerne il grafico su un intervallo di ampiezza T (per esempio $[0, T]$) per disegnarlo su tutto $\mathbb{R}$.

Seno e coseno



Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo la circonferenza

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$$

di centro l'origine e raggio 1. Si può costruire una funzione

$$\rho : \mathbb{R} \to C$$

nel modo seguente:

- $\rho(0) = (1, 0)$;
- se $x \neq 0$ allora $\rho(x)$ = quel punto che si ottiene partendo dal punto $(1, 0)$ e percorrendo su C un arco di lunghezza $|x|$, nel verso orario o antiorario secondo che sia $x < 0$ o $x > 0$.

Osservazione 9.10 ρ è periodica di periodo 2π. Infatti, siccome C è lunga 2π allora $\rho(x) = \rho(x + 2\pi)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Indichiamo con $\rho_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\rho_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le due coordinate di ρ, cioè per ogni x si ha $\rho(x) = \big(\rho_1(x), \rho_2(x)\big)$. La funzione ρ_1 è detta *coseno* mentre ρ_2 è detta *seno* e si indicano rispettivamente con $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$.

Identità fondamentale

Da quanto ora detto e per il teorema di Pitagora, risulta chiaro che le funzioni seno e coseno soddisfano l'identità fondamentale

$$\boxed{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.}$$

Valori notevoli

Dalla definizione si ottengono facilmente i valori di seno e coseno in 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ e $\pi/2$, riassunti nella seguente tabella

(9.3)

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\operatorname{sen} x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Grafici. Identità trigonometriche

I grafici delle funzioni seno e coseno sono come in figura. In nero è indicato il grafico della funzione ristretta ad un periodo. Il prolungamento in grigio sta ad indicare che le due funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.
Si vede che

- seno e coseno assumono tutti i valori compresi tra -1 e 1;
- sono periodiche di periodo 2π;
- $\cos(-x) = \cos x$, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè il coseno è una funzione pari, mentre il seno è dispari.

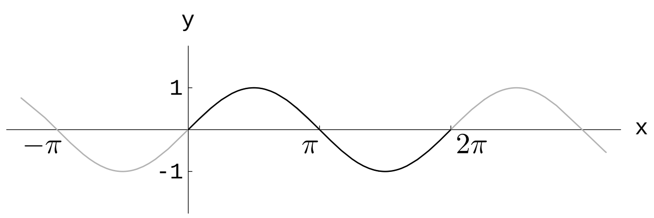


Grafico di $\operatorname{sen} x$

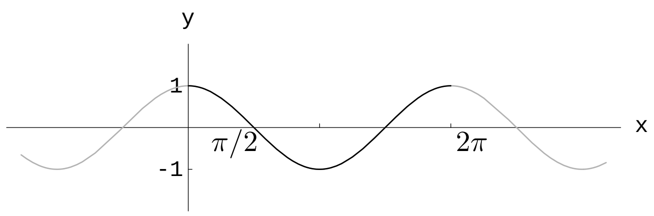


Grafico di $\cos x$

Oltre alla fondamentale, si potrebbero dimostrare le seguenti altre identità trigonometriche, presentate qui come formulario.

Relazioni tra seno e coseno

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \qquad \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \, \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}^2(x/2) = \frac{1-\cos x}{2}, \qquad \cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2}$$

Formule di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+y) &= \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x, \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \\
\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x, \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}$$

Formule di Werner e prostaferesi

Servono per trasformare prodotti in somme e viceversa.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \, \cos y &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\big), \\
\cos x \, \cos y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big), \\
\operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} y &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right), \\
\cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\
\cos x - \cos y &= -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Inversione delle funzioni circolari

Come funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ seno e coseno non sono né iniettive né suriettive. Si è visto infatti che $\cos(\mathbb{R}) = \operatorname{sen}(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ ed, essendo periodiche, non sono iniettive. Ma, osservando i grafici, si nota che non sono invertibili nemmeno se considerate come funzioni da $[0, 2\pi]$ in $[-1, 1]$. Tuttavia si vede che le restrizioni a certi intervalli sono biiezioni su $[-1, 1]$; di queste restrizioni si può quindi considerare la funzione inversa. In particolare

$$\cos\big|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1] \quad \text{è invertibile.}$$

Definiamo

$$\arccos := \big(\cos\big|_{[0,\pi]}\big)^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Anche

$$\operatorname{sen}\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \quad \text{è invertibile.}$$

Definiamo

$$\operatorname{arcsen} := \big(\operatorname{sen}\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\big)^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

I grafici sono quelli riportati in figura.

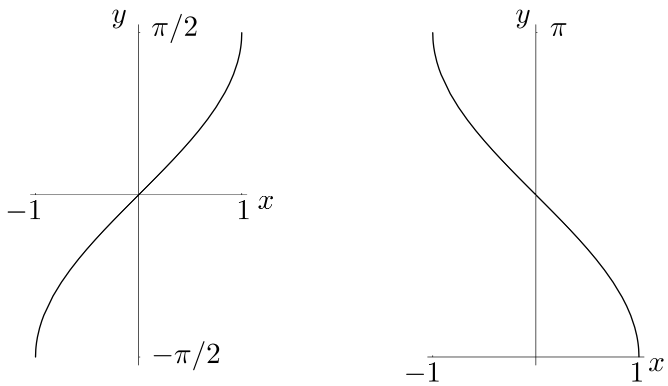


Grafico di $\operatorname{arcsen} x$ Grafico di $\arccos x$

Esercizio 9.11 *Dimostrare le seguenti identità:*

1. $\cos(\arccos x) = \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ *per ogni* $x \in [-1, 1]$*;*

2. $\arccos x + \operatorname{arcsen} x = \pi/2$ *per ogni* $x \in [-1, 1]$*;*

3. $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ *per ogni* $x \in [-1,1]$.

Si noti che

$$\arccos(\cos x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [0,\pi],$$

mentre se $x \notin [0,\pi]$ allora $\arccos(\cos x) \neq x$; analogamente

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Infine, volendo risolvere l'equazione

$$\cos x = \alpha$$

si osserva che

- non esiste soluzione se $\alpha \notin [-1,1]$ (cioè $|\alpha| > 1$);
- se $\alpha \in [-1,1]$ le soluzioni sono

$$\arccos\alpha + 2k\pi, \quad -\arccos\alpha + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Analogamente, l'equazione

$$\operatorname{sen} x = \alpha$$

ha soluzioni se e solo se $\alpha \in [-1,1]$ date da

$$\operatorname{arcsen}\alpha + 2k\pi, \qquad -\operatorname{arcsen}\alpha + (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

In particolare si osservi che

$$\cos x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\},$$
$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Tangente e arcotangente

La funzione *tangente*

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

è definita per ogni x tale che $\cos x \neq 0$, cioè su

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

La tangente è periodica di periodo π, cioè

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+\pi) \text{ per ogni } x \in D.$$

Dai valori notevoli di seno e coseno riportati nella tabella (9.3) si possono ottenere quelli della tangente. Il grafico è come in figura. Si noti che $\operatorname{tg}(D) = \mathbb{R}$; la restrizione

$$\operatorname{tg}\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \quad \text{è invertibile.}$$

Definiamo l'*arcotangente*

$$\operatorname{arctg} := \left(\operatorname{tg}\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

Il grafico è riportato in figura. Si noti che anche arctg è una funzione dispari. Si ha

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Invece

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

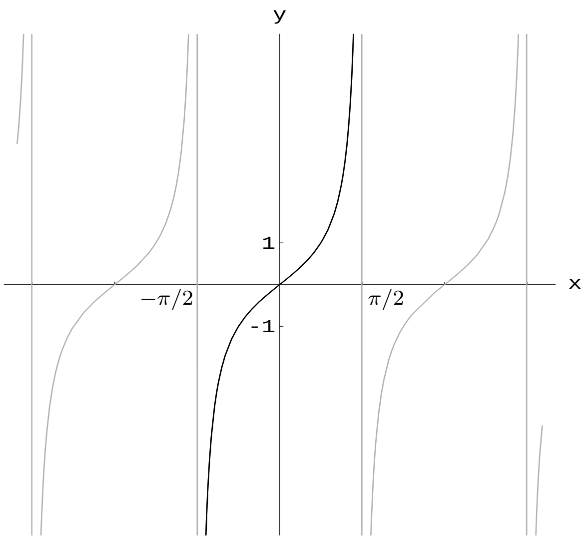


Grafico di $\operatorname{tg} x$

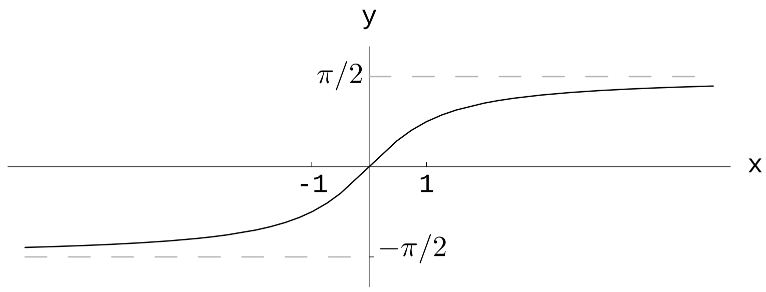


Grafico di $\operatorname{arctg} x$

La funzione *cotangente*

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

è definita per ogni x tale che $\operatorname{sen} x \neq 0$, cioè su

$$E = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si ha

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) \text{ per ogni } x \in E$$

e l'inversa della restrizione a $]0, \pi[$ si chiama *arcocotangente* (arccotg).

Esempio 9.12 Seno, coseno, arcoseno, arcocoseno e arcotangente sono funzioni limitate. Non sono limitate le potenze ad esponente $\alpha \neq 0$, la funzione valore assoluto, la tangente.

Esercizi

Esercizio 9.13 *Risolvere le disequazioni*

1. $-1 \leq x + |x - 2| < 3$;
2. $|x - 2| < |x + 3|$;
3. $|x^4 - x^2| > x^2 + 1$.

1. $S = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 5/2\}$.
2. Per definizione di valore assoluto si ha

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2-x & \text{se } x < 2, \end{cases} \qquad |x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

La disequazione data è quindi equivalente al sistema

$$\begin{cases} x < -3 \\ 2 - x < -x - 3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} -3 \leq x < 2 \\ 2 - x < x + 3 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x \geq 2 \\ x - 2 < x + 3 \end{cases}$$

cioè a

$$-\frac{1}{2} < x < 2 \bigcup x \geq 2$$

(qui il simbolo di unione significa “oppure).

In definitiva l'insieme delle soluzioni è $S = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x > -1/2\}$.

3. Osserviamo anzitutto che

$$|x^4 - x^2| = |x^2(x^2 - 1)| = x^2|x^2 - 1|.$$

Si ha poi

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } |x| \geq 1 \\ 1 - x^2 & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

Consideriamo dapprima il caso in cui $|x| \geq 1$. Allora la disequazione equivale a

$$x^2(x^2 - 1) > x^2 + 1 \iff x^4 - 2x^2 - 1 > 0$$

e, posto $x^2 = y$, si ha

$$y^2 - 2y - 1 > 0 \iff y < 1 - \sqrt{2} \text{ oppure } y > 1 + \sqrt{2},$$

dunque

$$x^4 - 2x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > 1 + \sqrt{2} \iff |x| > \sqrt{1 + \sqrt{2}}.$$

Poiché tali x soddisfano anche la condizione $|x| \geq 1$ allora, detto S l'insieme delle soluzioni della disequazione si ha

$$\left] -\infty, -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \right[\cup \left] \sqrt{1 + \sqrt{2}}, +\infty \right[\subseteq S.$$

Consideriamo ora il caso $|x| < 1$. La disequazione equivale a

$$x^2(1 - x^2) > x^2 + 1 \iff -x^4 - 1 > 0$$

che non ha soluzioni. In conclusione, sono soluzioni della disequazione tutti e soli gli elementi dell'insieme

$$S = \left] -\infty, -\sqrt{1 + \sqrt{2}} \right[\cup \left] \sqrt{1 + \sqrt{2}}, +\infty \right[.$$

Esercizio 9.14 *Risolvere le disequazioni*

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \sqrt{2+3x} \geq 4$;

2. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} < 5$.

1. Affinché tutte le funzioni che compaiono nella disequazione siano definite deve essere $x \geq 0$. Avendosi $\sqrt{2+x}-\sqrt{x} > 0$, la disequazione è equivalente alla seguente

$$2 + (\sqrt{2+3x}-\sqrt{x})(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}) \geq 4(\sqrt{2+x}-\sqrt{x}).$$

Moltiplicando ambo i membri per $\sqrt{2+x}+\sqrt{x}$ si ha

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2+3x} \geq 4$$

ed elevando al quadrato ambo i membri (positivi) si ottiene

$$\sqrt{(2+x)(2+3x)} \geq 2(3-x).$$

Elevando al quadrato di nuovo occorre fare attenzione che $3-x$ può assumere valori negativi, ma in tal caso la disuguaglianza è soddisfatta. Sono dunque soluzioni tutti gli $x \geq 3$. Supponendo ora $0 \leq x < 3$ possiamo elevare di nuovo al quadrato ottenendo

$$-x^2 + 32x - 32 \geq 0.$$

Gli x che soddisfano questa disequazione sono quelli compresi tra $16-4\sqrt{14}$ e $16+4\sqrt{14}$, ma dovendo soddisfare anche la condizione $0 \leq x < 3$ allora sono soluzioni gli $16-4\sqrt{14} \leq x < 3$. A questi vanno poi aggiunti gli $x \geq 3$ ottenendo che l'insieme delle soluzioni della disequazione è l'intervallo $[16-4\sqrt{14}, +\infty[$.

Esercizio 9.15 *Data la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \textit{se } x \in [-1,1] \\ \dfrac{1}{x} & \textit{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$$

determinare immagine e controimmagine degli insiemi $\mathbb{R}$ *e* $[1/2, 2[$.

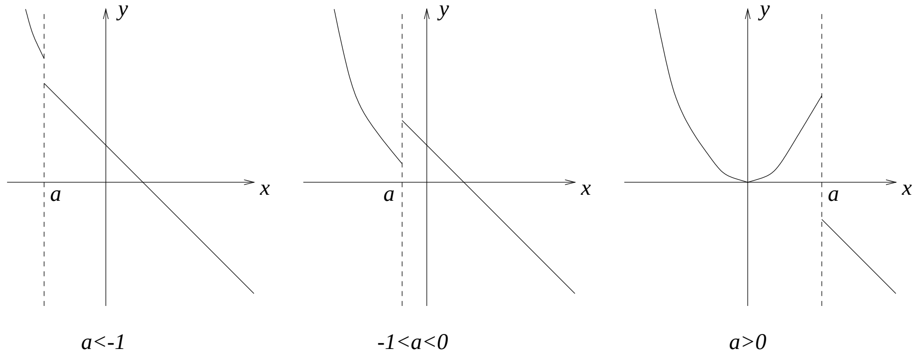
Esercizio 9.16 *Data la funzione* $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ *definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \textit{se } x \leq a \\ 1-x & \textit{se } x > a \end{cases}$$

1. *dire per quali valori del parametro reale a la funzione è invertibile e per quali di essi risulta $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;*

2. *per $a = -2$ determinare dominio, immagine e legge della funzione inversa.*

1. Conviene distinguere i casi $a \leq -1$, $-1 < a \leq 0$ e $a > 0$, nei quali il grafico di f si presenta come in figura. Pertanto, f risulta invertibile per



ogni $a \leq -1$. Per $a = -1$ si vede che l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$.
2. Si ha $f^{-1} :]-\infty, 3[\cup [8, +\infty[\to \mathbb{R}$ con

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{y/2} & \text{se } y \geq 8 \\ 1 - y & \text{se } y < 3. \end{cases}$$

Esercizio 9.17 †† *Date le funzioni*

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \textit{se } x \geq 0 \\ x^2 + ax + 1 & \textit{se } x < 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 + a^2 x & \textit{se } x > 0 \\ 1 + ax^2 & \textit{se } x \leq 0, \end{cases}$$

1. *dire per quali valori del parametro reale a le funzioni sono invertibili;*

2. *per $a = -2$ calcolare le funzioni inverse.*

Esercizio 9.18 † *Data la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x^2 + 2 & \textit{se } x \leq 0 \\ x^4 - a & \textit{se } x > 0, \end{cases}$$

†† *1.* f è invertibile per ogni $a \leq 0$, g è invertibile per ogni $a < 0$; *2.* l'inversa è $f^{-1} :]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ con $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{-y}$ se $y \leq 0$ e $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$ se $y > 1$, mentre $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $g^{-1}(y) = y - 1/4$ se $y > 1$ e $g^{-1}(y) = -\sqrt{(1-y)/2}$ se $y \leq 1$.

† *1.* f è invertibile per ogni $a \leq -2$ e si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ solo per $a = -2$; *2.* l'inversa è $f^{-1} :]-\infty, 2] \cup]4, +\infty[\to \mathbb{R}$ con $f^{-1}(y) = -\sqrt{(2-y)/5}$ se $y \leq 2$ e $f^{-1}(y) = \sqrt[4]{y-4}$ se $y > 4$.

1. *dire per quali valori del parametro reale* a *la funzione è invertibile e per quali di essi si ha* $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$*;*

2. *per* $a = -4$ *determinare dominio, immagine e legge della funzione inversa.*

Capitolo 10

Topologia di $\mathbb{R}$

ε-intorni

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Gli insiemi

$$]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= B_\varepsilon(x_0) = \{y \in \mathbb{R} \ : \ |x_0 - y| < \varepsilon\}$$

cioè gli intervalli di centro x_0 e raggio ε, saranno chiamati *ε-intorni* di x_0 o *palle di centro x_0 e raggio ε.*

Punti interni e insiemi aperti

Definizione 10.1 *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. $x_0 \in A$ si dice* punto interno[1] *ad A se esiste un ε-intorno di x_0 contenuto in A. A si dice* aperto *se ogni suo punto è punto interno. Per definizione l'insieme vuoto si considera aperto.*

Esempio 10.2 Sono dunque insiemi aperti

1. il vuoto ed $\mathbb{R}$;
2. le unioni di qualunque famiglia di intervalli aperti (provarlo);
3. le intersezioni finite di aperti (provarlo).

Inoltre: gli intervalli aperti sono insiemi aperti, l'insieme $]0, 1]$ non è aperto. Le intersezioni infinite di aperti possono non essere aperti. Ad esempio

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$$

[1] **Definizione** Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice *esterno* ad A se è interno ad $\mathbb{R} \setminus A$.

non è un insieme aperto.

Insiemi chiusi

Definizione 10.3 *Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ si dice* chiuso *se il complementare di C è un insieme aperto.*

Ricordando le leggi di De Morgan (cfr. esercizio 2.7), si sviluppano facilmente i seguenti esempi.

Esempio 10.4 Sono insiemi chiusi

1. il vuoto e $\mathbb{R}$;
2. le intersezioni di qualunque famiglia di chiusi (provarlo);
3. le unioni finite di chiusi (provarlo).

Inoltre: gli intervalli chiusi sono chiusi, l'insieme $]0, 1]$ non è chiuso. Le unioni infinite di chiusi possono non essere chiusi (**Esercizio**: esibire un esempio).

Intorni

Definizione 10.5 *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Un sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ si dice un* intorno *di x_0 se esiste un aperto A tale che*

$$x_0 \in A \subseteq U.$$

Esempio 10.6 Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sono intorni di x_0

1. gli ε-intorni
2. ogni aperto contenente x_0;
3. ogni insieme contenente un intorno di x_0;
4. le intersezioni finite di intorni di x_0.

Dato un punto $x \in \mathbb{R}$, la famiglia di tutti gli intorni di x, verrà spesso indicata con $\mathcal{U}(x)$; cioè

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \wp(\mathbb{R}) \ : \ U \text{ è intorno di } x\}.$$

Punti aderenti e chiusura

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 10.7 *Un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice* aderente *ad A se $U \cap A \neq \varnothing$ per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$.*

Definizione 10.8 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si chiama* chiusura *di A, e si indica con $\overline{A}$, l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A.*

Verificare per esercizio che:

1. A è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$;
2. $\overline{A} = \min\{C \text{ chiuso } : C \supseteq A\}$ dove il minimo è considerato rispetto alla relazione d'ordine di inclusione nell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$.

Teorema 10.9 *La chiusura di A coincide con l'insieme dei punti aderenti ad A.*

DIMOSTRAZIONE Il teorema afferma che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$x \in \overline{A} \iff U \cap A \neq \varnothing \text{ per ogni } U \in \mathcal{U}(x).$$

Cominciamo col provare ($\Rightarrow$). Supponiamo, per assurdo, che x non sia aderente ad A, cioè che esista $U \in \mathcal{U}(x)$ tale che $U \cap A = \varnothing$. In tal caso, per definizione di intorno, U contiene un aperto B tale che il suo complementare B^C è un chiuso che contiene A ma non contiene x, e pertanto x non può appartenere all'intersezione dei chiusi contenenti A, cioè non può appartenere alla chiusura di A, contro l'ipotesi.

Viceversa, sia x aderente ad A e supponiamo per assurdo che non appartenga alla chiusura. Allora esiste un chiuso $F \supseteq A$ tale che $x \notin F$. Allora, posto $U = F^C$ si ha che U è un aperto contenente x, cioè $U \in \mathcal{U}(x)$, ma $U \cap A = \varnothing$, contro il fatto che x è aderente ad A. □

Riassumendo, si ha che la chiusura di un insieme A è

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ C \supseteq A}} C = \min\{C \text{ chiuso } : C \supseteq A\} = \text{ insieme dei punti aderenti di} A.$$

Definizione 10.10 *Un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice* denso *in $\mathbb{R}$ se $\overline{D} = \mathbb{R}$.*

Esempio 10.11 $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono entrambi densi in $\mathbb{R}$.

Punti di accumulazione

Definizione 10.12 *Un punto $x \in \mathbb{R}$ si chiama di* accumulazione *per A se*

$$U \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing \text{ per ogni } U \in \mathcal{U}(x).$$

In altri termini, un punto $x \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per A se in ogni intorno di x vi è almeno un punto di A diverso da x. L'insieme dei punti di accumulazione si indica con A' (o talvolta con $D(A)$) e si chiama insieme *derivato* di A.

Esercizio 10.13 *Dimostrare che*

1. $\overline{A} = A \cup A'$;
2. $\overline{A} = A \iff A' \subseteq A$;
3. *A è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione*

Osservazione 10.14 È facile mostrare che se x è di accumulazione per A allora in ogni intorno di x cadono in effetti infiniti punti di A diversi da x. Notiamo anche che un punto di accumulazione per A non appartiene necessariamente ad A.

Esempio 10.15

A	A'
$\varnothing$	$\varnothing$
$[0,1]$	$[0,1]$
$]0,1]$	$[0,1]$
$]0,1[$	$[0,1]$
$\{0\}$	$\varnothing$
$]-1,0[\cup]0,1]\cup\{2,3\}$	$[-1,1]$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$	$\{0\}$

Nella tabella dell'esempio precedente risultano chiusi $[0,1]$, $\{0\}$ e $\mathbb{R}$.

Definizione 10.16 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x \in A$ si dice isolato se non è di accumulazione, cioè se esiste un intorno di x che non contiene altri punti di A (oltre ad x stesso).*

Esercizio 10.17 Individuare l'insieme dei punti isolati e quello dei punti esterni degli insiemi dell'Esempio 10.15.

Parte interna e frontiera

Definizione 10.18 *Si chiama* parte interna *di A, e si denota con $\overset{\circ}{A}$, l'unione di tutti gli aperti contenuti in A.*

È immediato verificare che A è aperto se e solo se $A = \overset{\circ}{A}$. È anche facile, e viene lasciato per esercizio, dimostrare che:

Proposizione 10.19 *Sia $x \in X$. $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ esiste $U \in \mathcal{U}(x)\ :\ U \subseteq A$.*

La parte interna di A è dunque l'insieme dei punti interni ad A.

Riassumendo, si ha che la parte interna di un insieme A è

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{B \text{ aperto} \\ B \subseteq A}} B = \max\{B \text{ aperto } : B \subseteq A\} = \text{ insieme dei punti interni ad } A.$$

Definizione 10.20 *Si chiama* frontiera *(o* bordo*) di A l'insieme*

$$F(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}\ .$$

Esercizi

Esercizio 10.21 *Mostrare che $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$.*

Esercizio 10.22 *Trovare chiusura, parte interna e frontiera di ciascuno degli insiemi dell'esempio 10.15.*

Esercizio 10.23 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Mostrare che*

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
2. $\overset{\circ}{A} = \left(\overline{A^C}\right)^C$;
3. $F(A) = \overline{A} \cap \overline{A^C}$.

Esercizio 10.24 *Mostrare che se A è denso in $\mathbb{R}$ allora ogni punto di $\mathbb{R}$ è di accumulazione per A.*

Esercizio 10.25 *Determinare l'insieme dei punti di accumulazione, la parte interna, la chiusura e la frontiera dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}$, $\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $([2,3) \setminus \{5/2\}) \cup \{4\}$, $[2,3] \setminus \{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.*

Funzioni continue

Definizione 10.26 *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* globalmente continua *(o* continua su $\mathbb{R}$*) se la controimmagine di ogni aperto è un aperto, cioè se*

$$A \subseteq \mathbb{R}, \ A \textit{ aperto} \Rightarrow f^{-1}(A) \textit{ aperto.}$$

Esempio 10.27 Sono (globalmente) continue

1. le funzioni costanti;
2. l'identità;
3. le funzioni composte di funzioni (globalmente) continue.

Esempio 10.28 Dato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, si chiama *funzione caratteristica* di A la funzione

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

La funzione $1_{[0,+\infty[}$ non è continua. Esibire altri esempi.

Capitolo 11

Limiti per $x \to +\infty$

Il concetto di limite è di fondamentale importanza nello studio della matematica. Per introdurlo consideriamo alcuni esempi.

Esempi introduttivi

Considerata una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ci si potrebbe porre il problema di che cosa succeda ad a_n quando n diventa arbitrariamente grande. Questa domanda è importante ogni volta che si abbia a che fare con una successione di dati, come ad esempio le quotazioni di un titolo in borsa. Quale sarà l'andamento in futuro dei valori? Cresceranno? Decresceranno? Approssimeranno sempre meglio un qualche valore "limite?

Un esempio potrebbe essere $a_n = \frac{n}{n+1}$. Provando a disegnare nel piano cartesiano i primi termini della successione a_n si osserva che i suoi valori tendono a crescere ed avvicinarsi sempre più a 1. Come formalizzare questa osservazione? Faremo intervenire il concetto di limite.

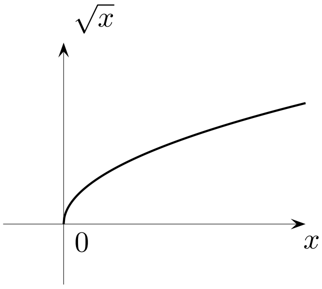
Come ulteriore esempio consideriamo la funzione $f(x) = 2 + x\,\mathrm{sen}(1/x)$ che è definita per tutti gli x reali e diversi da 0. Cosa succede alla funzione in 0 o, meglio, ai valori $f(x)$ per gli x sempre più vicini a 0? Provando a rappresentarne il grafico nel piano cartesiano, per esempio servendosi di quello a pagina 117, si può osservare che esso oscilla infinite volte vicino a 0 ma, più ci si avvicina, più l'ampiezza delle oscillazioni viene smorzata e la funzione approssima sempre meglio il valore 2. Anche in questo caso faremo intervenire la nozione di limite per formalizzare precisamente l'osservazione.

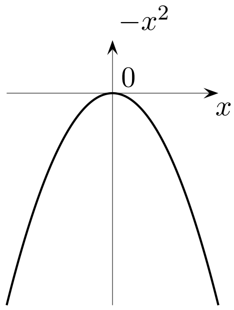
Osservando, per esempio, i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = -x^2$,

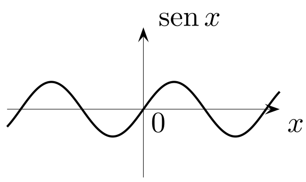
$f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ e

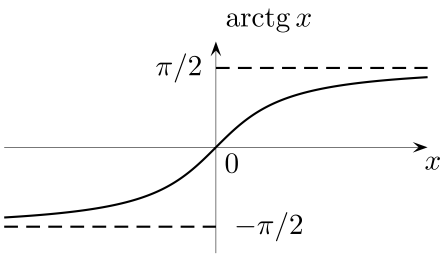
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{11.1}$$

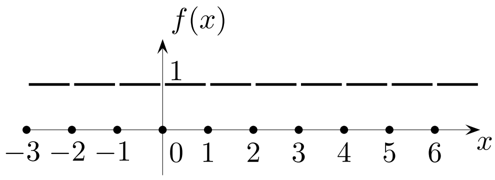
si nota che il comportamento delle funzioni quando x diventa arbitrariamente grande è differente nei vari casi.











Ampliamento di $\mathbb{R}$

Definiamo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ed estendiamo l'ordinamento totale presente su $\mathbb{R}$ ad $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo, sempre per definizione,

$$-\infty < x \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad +\infty > x \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vedremo che non tutte le usuali operazioni che si fanno con i numeri si possono fare con $-\infty$ e $+\infty$.

Limiti per $x \to +\infty$

Limiti infiniti per $x \to +\infty$

Definizione 11.1 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.*

Diremo che f ha limite $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $x_M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in A$ tale che $x > x_M$.

Diremo che f ha limite $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

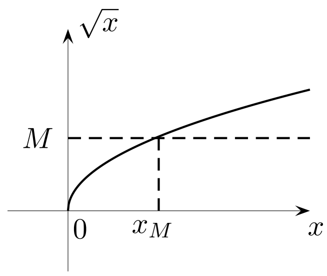
se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $x_M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) < M$ per ogni $x \in A$ tale che $x > x_M$.

Esempio 11.2 La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ ha come dominio $A = [0, +\infty[$, che è un insieme non limitato superiormente, come richiesto dalla definizione 11.1, in base alla quale la funzione ha limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Infatti si osserva che, fissata una qualunque costante M, esiste una x_M sull'asse delle ascisse oltre la quale la funzione assume valori maggiori di M, cioè, in formule

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\, \exists\, x_M \in \mathbb{R} \,:\, \sqrt{x} > M\, \forall\, x > x_M.$$

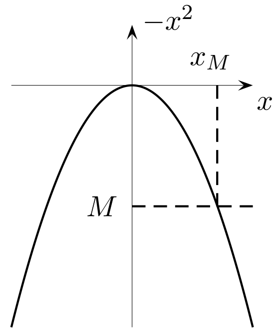


Nel caso specifico un x_M con questa proprietà è $x_M = M^2$, che si trova risolvendo in x la disequazione $\sqrt{x} > M$.

Naturalmente $\sqrt{x}$ non è l'unica funzione che ha limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$; elencarne altre per esercizio.

Esempio 11.3 La funzione $f(x) = -x^2$ ha come dominio $A = \mathbb{R}$, che è un insieme non limitato superiormente, come richiesto dalla definizione 11.1, in base alla quale la funzione ha limite $-\infty$ per x che tende a $+\infty$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$$



Infatti si osserva che, fissata una qualunque costante M, esiste una x_M sull'asse delle ascisse oltre la quale la funzione assume valori minori di M, cioè, in formule

$\forall\, M \in \mathbb{R}\, \exists\, x_M \in \mathbb{R} \,:\, -x^2 < M\, \forall\, x > x_M$.

Nel caso specifico, se $M \geq 0$, un x_M con questa proprietà è $x_M = \sqrt{M}$, che si trova risolvendo in x la disequazione $-x^2 < M$.

Elencare, per esercizio, altre funzioni che hanno limite $-\infty$ per x che tende a $+\infty$.

Esercizio 11.4 *Dimostrare, utilizzando la definizione di limite, che*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty.$$

Limiti finiti per $x \to +\infty$

Definizione 11.5 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non limitato superiormente ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f* ha limite $l \in \mathbb{R}$ per x tendente a $+\infty$ *e scriveremo*

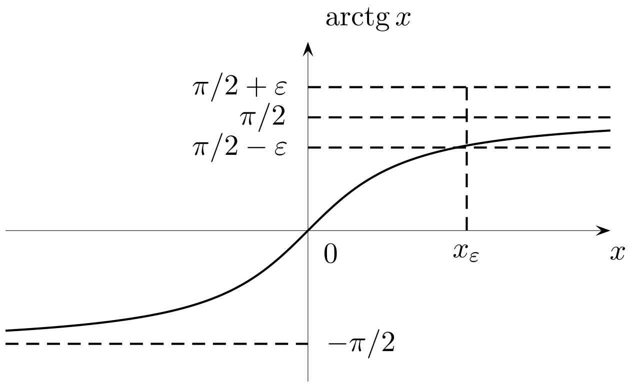
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l,$$

se per ogni intorno U di l esiste $x_U \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \in U$ per ogni $x \in A$ tale che $x > x_U$.

Esercizio 11.6 *Riconoscere che le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{R} \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon\, \forall\, x \in A \,:\, x > x_\varepsilon$;
3. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{R} \,:\, |f(x) - l| < \varepsilon\, \forall\, x \in]x_\varepsilon, +\infty[\cap A$;
4. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon > 0 \,:\, l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon\, \forall\, x \in]x_\varepsilon, +\infty[\cap A$;
5. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{R} \,:\, x \in A,\, x > x_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$;
6. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon > 0 \,:\, x \in A,\, x \geq x_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Esempio 11.7
Nel caso della funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ si osserva che, fissata una qualunque costante $\varepsilon > 0$ esiste una x_ε sull'asse delle ascisse oltre la quale la funzione assume valori compresi tra $\pi/2 - \varepsilon$ e $\pi/2 + \varepsilon$, cioè, in formule



$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{R}\ :\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\, \forall\, x > x_\varepsilon.$$

Nel caso specifico un x_ε con questa proprietà è $x_\varepsilon = \operatorname{tg}(\pi/2 - \varepsilon)$, che si trova risolvendo in x il sistema di disequazioni

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} + \varepsilon.$$

Elencare, per esercizio, altre funzioni che hanno limite finito per x che tende a $+\infty$.

Esercizio 11.8 *Dimostrare, utilizzando la definizione di limite, che*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Posto $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ si ha $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, perciò il dominio di f non è limitato superiormente. Fissiamo arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \ \ \forall\, x > x_\varepsilon.$$

La disuguaglianza $|f(x) - 1| < \varepsilon$ si può scrivere nella forma equivalente

$$-\varepsilon < f(x) - 1 < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{x}{x+1} - 1 < \varepsilon \iff -\varepsilon < -\frac{1}{x+1} < \varepsilon.$$

Poiché siamo interessati al limite per $x \to +\infty$, non è restrittivo supporre che $x > 0$, cosa che facciamo da ora in poi. Allora la seconda disuguaglianza è banalmente verificata. La prima equivale a

$$\varepsilon > \frac{1}{x+1} \qquad \iff \qquad x > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Un x_ε con la proprietà cercata è quindi $x_\varepsilon = \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ (o qualunque altro numero più grande).

Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ non limitato superiormente non soddisfa alcuna delle precedenti definizioni di limite si dice che f *non ha limite per x che tende a $+\infty$*.

Esempio 11.9 La funzione $f(x)$ definita in (11.1) non ha limite per x che tende a $+\infty$, cioè

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{non esiste.}$$

Infatti, cominciamo con l'osservare che, essendo limitata, la funzione non può avere limite $+\infty$ né $-\infty$. Ma non può nemmeno avere un limite finito dal momento che per ogni $\overline{x} \in \mathbb{R}$ esistono dei punti del dominio più grandi di $\overline{x}$ in cui la funzione vale 0 e altri in cui vale 1 quindi la Definizione 11.5 di limite finito per $x \to +\infty$ non può essere soddisfatta. Un discorso analogo analogo vale per la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Unicità del limite

Non può accadere che, per $x \to +\infty$, una funzione tenda a due limiti diversi. Vale cioè il seguente teorema di unicità del limite.

Teorema 11.10 *Se f ha limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ per $x \to +\infty$, questo è unico.*

Dimostrazione In altre parole, il teorema afferma che f non può avere due limiti diversi. Supponiamo dunque che l_1 ed l_2 siano due limiti di f per $x \to +\infty$ e, siccome la definizione di limite si scrive diversamente a seconda che il limite sia finito o infinito (vedi le definizioni 11.1 e 11.5), cominciamo con il supporre che i due limiti siano entrambi finiti, cioè che $l_1 \in \mathbb{R}$ ed $l_2 \in \mathbb{R}$. La dimostrazione consiste allora nel provare che, in tal caso, essi sono uguali.

Essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_1$, per la Definizione 11.5 si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon^1 \in \mathbb{R}\ :\ |f(x) - l_1| < \varepsilon\ \forall\, x \in A,\ x > x_\varepsilon^1$$

ed essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l_2$ si ha anche

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon^2 \in \mathbb{R}\ :\ |f(x) - l_2| < \varepsilon\ \forall\, x \in A,\ x > x_\varepsilon^2.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e osserviamo che, preso un qualunque $x > \max\{x_\varepsilon^1, x_\varepsilon^2\}$, per le precedenti e per la disuguaglianza triangolare si ha

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon.$$

Riassumendo, abbiamo scoperto che

$$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \ \forall\, \varepsilon > 0$$

ma questo implica $|l_1 - l_2| = 0$ (cfr. Esercizio 9.6), cioè $l_1 = l_2$.

Per concludere la dimostrazione rimane da osservare che si possono escludere i casi in cui uno dei due limiti sia $+\infty$ e l'altro finito o $-\infty$. Infatti, se fosse ad esempio $l_1 = +\infty$ e $l_2 \in \mathbb{R}$ allora per la Definizione 11.1 si avrebbe che

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, x_M \in \mathbb{R}\ :\ f(x) > M\ \forall\, x \in A,\ x > x_M, \tag{11.2}$$

e per la Definizione 11.5 si avrebbe

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in \mathbb{R}\ :\ |f(x) - l_2| < \varepsilon\ \forall\, x \in A,\ x > x_\varepsilon. \tag{11.3}$$

In particolare, scrivendo la (11.3) per $\varepsilon = 1$ e la (11.2) per $M = l_2 + 1$ e si avrebbe che $f(x)$ dovrebbe essere contemporaneamente strettamente maggiore e strettamente minore di M per ogni $x > \max\{x_\varepsilon, x_M\}$, cosa evidentemente impossibile. Escludere, per esercizio, che si possa verificare il caso in cui $l_1 = +\infty$ e $l_2 = -\infty$. □

Capitolo 12

Successioni

Limite di una successione

Se $A = \mathbb{N}$ allora la funzione f è una successione di numeri reali e i suoi valori si denotano usualmente con f_n anzichè con $f(n)$. L'intera successione si denota con vari simboli, come ad esempio $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o semplicemente (f_n). Più comunemente, in luogo della lettera f si usano le lettere a o b, cosicchè si parlerà ad esempio delle successioni (a_n) e (b_n). Siccome $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente, si può definire il limite per $n \to \infty$ di una successione (a_n). Riscrivendo la definizione 11.5 nel caso particolare $A = \mathbb{N}$ si ottiene che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

se e solo se per ogni intorno U di l e $n_U \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n > n_U$. Equivalentemente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Analogamente si possono scrivere le definizioni di

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{e di} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

(farlo per esercizio). Se una successione ha limite finito $l \in \mathbb{R}$ si dice anche che la successione è *convergente*, mentre se ha limite $+\infty$ o $-\infty$ si dice *divergente*.

Esempio 12.1 Disegnare le successioni $a_n = n$, $a_n = -n^{1/2}$, $a_n = (-1)^n$, $a_n = \operatorname{arctg} n$, $a_n = (-1)^n/n$.

Limitatezza delle successioni convergenti

Ricordiamo che, come per tutte le funzioni (cfr. esercizio 9.9), una successione (a_n) è limitata se l'immagine è un insieme limitato, cioè se esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

È immediato riconoscere che esistono successioni limitate che non sono convergenti: trovarne una cercandola tra quelle dell'esercizio 12.1. Viceversa:

Teorema 12.2 *(a_n) convergente $\Rightarrow$ (a_n) limitata.*

DIMOSTRAZIONE Sia $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Dalla definizione di limite con $\varepsilon = 1$ si ha che esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - l| < 1 \; \forall \, n > n_1.$$

Segue che

$$|a_n| = |a_n - l + l| < |a_n - l| + |l| < 1 + |l| \; \forall \, n > n_1.$$

Preso $M = \max\{1 + |l|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_1}|\}$ si ha infine

$$|a_n| \leq M \; \forall \, n \in \mathbb{N},$$

cioè (a_n) è limitata. □

Esercizio 12.3 *Dimostrare che*

$$(a_n) \textit{ divergente} \Rightarrow (a_n) \textit{ non limitata.}$$

Ricordiamo che una successione (a_n) è limitata se e solo se esiste una costante $L > 0$ tale che $|a_n| \leq L$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque (a_n) è non limitata se e solo se per ogni $L > 0$ esiste $\overline{n}_L \in \mathbb{N}$ tale che $|a_{\overline{n}_L}| > L$; questo è quindi ciò che si deve dimostrare. Supponiamo, per fissare le idee, che (a_n) diverga a $+\infty$, il caso in cui (a_n) diverga a $-\infty$ essendo del tutto analogo. Allora, per definizione di limite, si ha che

$$\forall \, M > 0 \; \exists \, n_M \in \mathbb{N} \; : \; a_n > M \; \forall \, n > n_M$$

preso allora $M = L$ ed $\overline{n}_L = n_M + 1$ si ottiene che $|a_{\overline{n}_L}| > L$, e quindi (a_n) non è limitata.

Esercizio 12.4 *Data la successione (a_n) con*

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n},$$

determinarne, usando la definizione, l'eventuale limite.

Esercizio 12.5 *Sia $a_n = (-1)^n$. Dimostrare, utilizzando la definizione di limite, che la successione (a_n) non ha limite per $n \to \infty$.*

Limiti di successioni monotone

Poiché le successioni sono funzioni, sappiamo cosa vuol dire che una successione è monotona (crescente, decrescente, non crescente o non decrescente), ma per la particolarità delle successioni le condizioni che esprimono la monotonia sono più semplici. In particolare, detta (a_n) la successione in questione, si ha

- (a_n) strettamente crescente $\iff a_n < a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) crescente $\iff a_n \le a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) strettamente decrescente $\iff a_n > a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) decrescente $\iff a_n \ge a_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 12.6 (sul limite delle successioni monotone) *Ogni successione monotona ha limite, finito o infinito. Tale limite coincide con* $\sup a_n$ *se* (a_n) *è crescente e con* $\inf a_n$ *se* (a_n) *è decrescente.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo, per fissare le idee, che (a_n) sia crescente e, denotato con S l'estremo superiore di (a_n), supponiamo che $S \in \mathbb{R}$ (si trattino i casi $S = +\infty$ o (a_n) decrescente per esercizio). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$a_n \le S \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{12.1}$$

D'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$, per definizione $S - \varepsilon$ non è un maggiorante, quindi esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_\varepsilon} > S - \varepsilon$. Poiché la successione è crescente, si ha anche

$$a_n > S - \varepsilon \quad \forall\, n \ge n_\varepsilon \tag{12.2}$$

e riunendo (12.1) e (12.2) si ottiene la tesi. $\square$

Capitolo 13

Altri limiti

Limiti per $x \to -\infty$

Richiedendo che il dominio sia un insieme non limitato inferiormente si può anche dare la definizione di limite per $x \to -\infty$. Ad esempio, diremo che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \in A$ tale che $x < x_\varepsilon$.

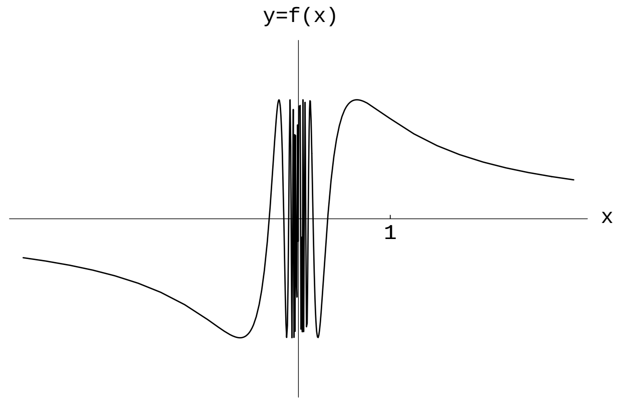
Esercizio 13.1 *Scrivere le definizioni di*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

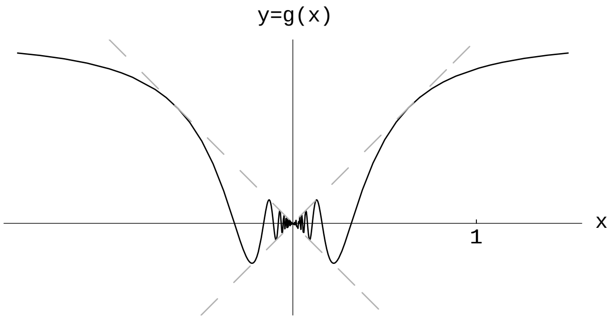
Limiti per $x \to x_0$

Le figure riportano i grafici di alcune funzioni disegnati da un computer.

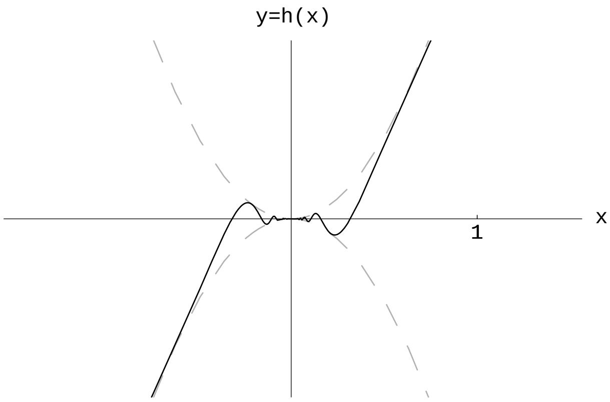
$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$



$$g(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$



$$h(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$



Definizione 13.2 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A'$. Si dice che f* ha limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$, *e si scrive*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

se per ogni intorno U di l esiste un intorno V di x_0 tale che

$$f(V \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq U.$$

Osservazione 13.3 Poichè ogni intorno di l contiene un ε-intorno di l e ogni intorno di x_0 contiene un δ-intorno di x_0, allora la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ risulta equivalente alla seguente: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Osservazione 13.4 Poichè $x \neq x_0$, nella definizione di limite non ha importanza il valore assunto dalla funzione nel punto x_0. Si potrebbero dare altre definizioni di limite, diverse dalla nostra, in cui invece si tiene conto di tale valore.

Osservazione 13.5 Nella definizione di limite ci si può restringere a considerare gli ε "abbastanza piccoli, cioè gli ε tali che $\varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0$, con ε_0 fissato. Infatti il δ_{ε_0} della definizione di limite che va bene per ε_0 va altrettanto bene per tutti gli $\varepsilon > \varepsilon_0$. Analogamente nella definizione di limite $+\infty$ ci si può limitare agli $M \geq M_0$ e nella definizione di limite $-\infty$ agli $M \leq M_0$, dove M_0 è fissato.

Esercizio 13.6 *Scrivere esplicitamente le definizioni di* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *e di* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Unificazione della definizione di limite

Per unificare la definizione di limite in un'unico enunciato che comprenda tutti i casi possibili, anzichè la topologia di $\mathbb{R}$ avremmo dovuto introdurre la topologia di $\overline{\mathbb{R}}$ definendo anche gli intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. Si chiama *intorno di* $+\infty$ qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo della forma $]a, +\infty] :=]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$ e, analogamente, si chiama intorno di $-\infty$ qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo della forma $[-\infty, b[:=] - \infty, b[\cup \{-\infty\}$. Si deve poi estendere la definizione di punto di accumulazione ad $\mathbb{R}$, comprendendo nella definizione anche $+\infty$ e $-\infty$, che risulteranno punti di accumulazione degli insiemi non limitati superiormente e inferiormente, rispettivamente. In tal modo si può scrivere la seguente definizione di limite che copre tutti i casi possibili.

Definizione 13.7 *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ *e sia* x_0 *un punto di accumulazione di* A *in* $\overline{\mathbb{R}}$. *Si dice che* f *ha limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *per* $x \to x_0$, *e si scrive*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l,$$

se per ogni intorno U *di* l *esiste un intorno* V *di* x_0 *tale che*

$$f(V \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq U.$$

Esempio 13.8 Facciamo vedere che il concetto di limite formalizza correttamente quanto si era intuito all'inizio del capitolo per la funzione $f(x) = 2 + x \operatorname{sen}(1/x)$ mostrando che

$$\lim_{x\to 0} \big(2 + x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\big) = 2.$$

Usando la definizione di limite, fissato un arbitrario numero reale $\varepsilon > 0$, dobbiamo far vedere che, corrispondentemente, esiste un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$0 < |x - 0| < \delta_\varepsilon \quad \text{implica} \quad \left|2 + x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - 2\right| < \varepsilon.$$

A tal scopo basta prendere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$. Infatti se $0 < |x| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$, utilizzando il fatto che la funzione seno ha valori compresi tra -1 ed 1, si ottiene

$$\left|x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right| \leq |x| < \varepsilon,$$

come volevasi dimostrare.

Esempio 13.9 Verifichiamo che

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x + 1} = 1.$$

Come in precedenza, fissiamo un arbitrario $\varepsilon > 0$. Per l'osservazione 13.5, ci si può restringere agli $\varepsilon < 2$. Dobbiamo trovare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon \quad \text{implica} \quad \left|\frac{3x - 1}{x + 1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Usualmente si utilizza un procedimento a ritroso mostrando che esiste un intervallo del tipo $0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon$ contenuto nell'insieme delle soluzioni della disequazione $|\frac{3x-1}{x+1} - 1| < \varepsilon$ che, eliminando il valore assoluto, equivale a

$$-\varepsilon < 2\frac{x - 1}{x + 1} < \varepsilon.$$

Possiamo restringerci a cercare δ_ε tra i numeri più piccoli di 2: in tal modo l'essere $0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon$ garantisce che $x + 1 > 0$ e quindi, per $x \in]-1, +\infty[$ la disequazione equivale a

$$-\varepsilon(x + 1) < 2(x - 1) < \varepsilon(x + 1) \iff \begin{cases} -\varepsilon(x + 1) < 2(x - 1) \\ 2(x - 1) < \varepsilon(x + 1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{2 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} < x \\ x < \dfrac{2 + \varepsilon}{2 - \varepsilon} \end{cases} \iff \frac{2 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} < x < \frac{2 + \varepsilon}{2 - \varepsilon}$$

$$\iff \frac{2 - \varepsilon}{2 + \varepsilon} - 1 < x - 1 < \frac{2 + \varepsilon}{2 - \varepsilon} - 1 \iff -\frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon} < x - 1 < \frac{2\varepsilon}{2 - \varepsilon}.$$

Se poniamo $a_\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{2+\varepsilon} > 0$ e $b_\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{2-\varepsilon} > 0$, allora l'insieme delle soluzioni di quest'ultima disequazione è $S = \{x \ : \ -a_\varepsilon < x - 1 < b_\varepsilon\}$. Vediamo allora che se prendiamo $\delta_\varepsilon = \min\{a_\varepsilon, b_\varepsilon\} > 0$ si ha che $0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon$ implica $x \in S$ e dunque facendo tutti i passaggi all'indietro si ottiene che vale $\left|\frac{3x-1}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Esercizio 13.10 *Determinare, usando la definizione, i seguenti limiti, qualora esistano.*

1. $\lim_{x\to 2} x^2$;
2. $\lim_{x\to 0} |x|$;
3. $\lim_{x\to 0} \sqrt{3}$;
4. $\lim_{x\to 0} f(x)$ *con* $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0; \end{cases}$
5. $\lim_{x\to 0} f(x)$ *con* $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \end{cases}$
6. $\lim_{x\to 0} f(x)$ *con* $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

Esercizio 13.11 *Verificare, in base alla definizione di limite, che*

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{2x+3} = \frac{2}{5}.$$

Si deve dimostrare che, fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$0 < |x - 1| < \delta_\varepsilon \quad \text{implica} \quad \left|\frac{3x-1}{2x+3} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon.$$

Si ha

$$\left|\frac{3x-1}{2x+3} - \frac{2}{5}\right| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \frac{11(x-1)}{5(2x+3)} < \varepsilon.$$

Poiché il limite è per $x \to 1$, allora possiamo restringerci a considerare gli $x > -3/2$ per i quali il denominatore è positivo (ciò equivale a restringere la scelta ai $\delta_\varepsilon < 5/2$). Allora si tratta di risolvere in x il sistema di disuguaglianze

$$\begin{cases} -\varepsilon 5(2x+3) < 11(x-1) \\ 11(x-1) < \varepsilon 5(2x+3) \end{cases} \iff \begin{cases} x(11+10\varepsilon) > 11 - 15\varepsilon \\ x(11-10\varepsilon) < 11 + 15\varepsilon. \end{cases}$$

Non è restrittivo ora supporre che $\varepsilon < 11/10$, perché i δ_ε che troviamo per questi valori di ε vanno bene anche per tutti quelli più grandi. Con ciò si ottiene allora

$$\begin{cases} x > \dfrac{11-15\varepsilon}{11+10\varepsilon} \\ x < \dfrac{11+15\varepsilon}{11-10\varepsilon}. \end{cases}$$

δ_ε deve quindi essere tale che

$$\text{se } \ 1-\delta_\varepsilon < x < 1+\delta_\varepsilon \ \text{ allora } \ \frac{11-15\varepsilon}{11+10\varepsilon} < x < \frac{11+15\varepsilon}{11-10\varepsilon}$$

e si può quindi prendere δ_ε in modo tale che

$$\begin{cases} 1-\delta_\varepsilon \geq \dfrac{11-15\varepsilon}{11+10\varepsilon} \\ 1+\delta_\varepsilon \leq \dfrac{11+15\varepsilon}{11-10\varepsilon} \end{cases} \iff \begin{cases} \delta_\varepsilon \leq \dfrac{25\varepsilon}{11+10\varepsilon} \\ \delta_\varepsilon \leq \dfrac{25\varepsilon}{11-10\varepsilon} \end{cases}$$

cioè basta prendere

$$\delta_\varepsilon = \min\left\{\frac{25\varepsilon}{11+10\varepsilon}, \frac{25\varepsilon}{11-10\varepsilon}\right\} = \frac{25\varepsilon}{11+10\varepsilon}.$$

Esercizio 13.12 *1. Scrivere la definizione di limite*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

per una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, precisando quali ipotesi vanno fatte sul dominio $A \subseteq \mathbb{R}$.

2. Verificare, in base alla definizione, che $\lim_{x\to-\infty}(x^2+\operatorname{sen} x+\cos x) = +\infty$.

A deve essere non limitato inferiormente e

$$\forall M > 0 \ \exists\, x_M \in \mathbb{R} \ : \ f(x) > M \ \forall\, x \in A \ : \ x < x_M.$$

Fissato $M > 0$ dobbiamo dunque trovare un $x_M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x < x_M$. A tal scopo osserviamo che la disuguaglianza

$$f(x) > M \iff x^2 + \operatorname{sen} x + \cos x > M$$

è soddisfatta se $x^2 - 2 > M$, in quanto seno e coseno hanno valori in $[-1, 1]$. Poiché d'altra parte

$$x^2 - 2 > M \iff x^2 > M + 2 \Leftarrow x < -\sqrt{M+2}$$

allora la definizione di limite è soddisfatta prendendo $x_M = -\sqrt{M+2}$.

Limiti per $x \to x_0$ da destra e da sinistra

Quando ci si avvicina al punto x_0 considerando valori di $x \in A$ solo maggiori di x_0 oppure solo minori di x_0, come accade ad esempio quando x_0 è estremo di un intervallo su cui è definita la funzione, si parla rispettivamente di limite da destra e da sinistra.

Definizione 13.13 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in (A \cap]x_0, +\infty[)'$. Il limite*

$$\lim_{x \to x_0} f_{|A \cap]x_0,+\infty[}(x),$$

qualora esista, viene detto limite di f per x tendente a x_0 da destra, *e denotato con*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Osservazione 13.14 Si ha $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ per ogni $x \in A$ tale che $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Definizione 13.15 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in (A \cap] - \infty, x_0[)'$. Il limite*

$$\lim_{x \to x_0} f_{|A \cap]-\infty,x_0[}(x),$$

qualora esista, viene detto limite di f per x tendente a x_0 da sinistra, *e denotato con*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Osservazione 13.16 Si ha $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ per ogni $x \in A$ tale che $x_0 - \delta < x < x_0$.

Esercizio 13.17 *Estendere le osservazioni 13.14 e 13.16 ai seguenti limiti:* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Esempio 13.18 Consideriamo la funzione *segno*:

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Quindi i limiti sinistro e destro esistono ma sono diversi mentre il limite della funzione quando x tende a 0 non esiste.

Vale il seguente teorema la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Teorema 13.19 *Si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l.$$

Limiti di funzioni monotone

Per le funzioni monotone vale un teorema di esistenza dei limiti da destra e da sinistra analogo al teorema sul limite delle successioni monotone. Precisamente:

Teorema 13.20 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione monotona.*
Se $x_0 \in (A \cap]x_0, +\infty[)'$ allora esiste il limite da destra in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) \ : \ x\in A,\ x>x_0\} & \textit{se } f \textit{ è crescente} \\ \sup\{f(x) \ : \ x\in A,\ x>x_0\} & \textit{se } f \textit{ è decrescente.} \end{cases}$$

Se $x_0 \in (A \cap]-\infty, x_0[)'$ allora esiste il limite da sinistra in x_0 e si ha

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) \ : \ x\in A,\ x<x_0\} & \textit{se } f \textit{ è crescente} \\ \inf\{f(x) \ : \ x\in A,\ x<x_0\} & \textit{se } f \textit{ è decrescente.} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE Supponiamo, per fissare le idee, che f sia crescente, che $x_0 \in \mathbb{R}$, e dimostriamo che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) \ : \ x\in A,\ x>x_0\}.$$

Le dimostrazioni negli altri casi sono del tutto simili e vengono lasciate per esercizio.

Cominciamo col considerare il caso in cui $\inf\{f(x) \, : \, x\in A,\ x>x_0\} =: l$ è finito. Per le proprietà caratteristiche dell'inf si ha dunque che

1. $f(x) \geq l$ per ogni $x \in A$, $x > x_0$;
2. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in A,\ x_\varepsilon > x_0\ :\ f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon$.

Poiché f è crescente allora

$$x < x_\varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_\varepsilon),$$

pertanto la proprietà 2. vale anche per tutti gli x compresi tra x_0 e x_ε, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in A,\ x_\varepsilon > x_0\ :\ f(x) < l + \varepsilon\ \forall\, x \in]x_0, x_\varepsilon].$$

D'altra parte, per la 1., per gli stessi x si ha che $f(x) > l - \varepsilon$, qualunque sia $\varepsilon > 0$. Riunendo il tutto e ponendo $\delta_\varepsilon := x_\varepsilon - x_0$ si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0\ :\ l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon\ \forall\, x \in]x_0, x_0 + \delta_\varepsilon[\cap A,$$

cioè $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$, come volevasi dimostrare.

Rimane da considerare il caso in cui $\inf\{f(x)\ :\ x \in A,\ x > x_0\} = -\infty$, cioè f non limitata inferiormente in $A \cap]x_0, +\infty[$, cioè

$$\text{non}\,(\exists\, M \in \mathbb{R}\ :\ f(x) \geq M\ \forall\, x \in A,\ x > x_0).$$

Completare la dimostrazione per esercizio. □

Permanenza del segno

Teorema 13.21 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Se esiste $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che*

$$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) > 0 \ \textit{(cioè } f \textit{ ha lo stesso segno di } l\textit{)}.$$

Analogamente se $l < 0$.

DIMOSTRAZIONE Basta prendere $\varepsilon = |l|$ nella definizione di limite. □

Operazioni con i limiti

In $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si pone, per definizione, che

$$+\infty + c = c + \infty = +\infty, \quad -\infty + c = c - \infty = -\infty,$$

$$+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0,$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Inoltre per ogni $c \neq 0$ si pone

$$(+\infty) \cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0, \end{cases} \qquad (-\infty) \cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Non vengono definiti invece i risultati delle operazioni

$$+\infty - \infty, \qquad (\pm\infty) \cdot 0, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{0},$$

che vengono cioè lasciati indeterminati.

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da 0) dei due limiti, purché non sia una delle *forme indeterminate* $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$, come stabilito dal seguente teorema.

Teorema 13.22 *Siano f e g due funzioni con*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$$

con x_0 eventualmente $+\infty$ o $-\infty$. Allora si ha

- **somma:** $\lim_{x \to x_0} \big[f(x) + g(x)\big] = \alpha + \beta$ *in tutti i casi in cui $\alpha + \beta$ è definito (cioè sempre ad esclusione dei casi $+\infty - \infty$ e $-\infty + \infty$);*
- **prodotto:** $\lim_{x \to x_0} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \alpha \cdot \beta$ *in tutti i casi in cui $\alpha \cdot \beta$ è definito (cioè sempre ad esclusione dei casi $\pm\infty \cdot 0$ e $0 \cdot (\pm\infty)$);*
- **quoziente:** *se $\alpha \neq 0$ e $f(x) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$ allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha};$$

- **valore assoluto:** $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\alpha|$.

Osservazione 13.23 Dalla proprietà del quoziente abbiamo tralasciato volutamente il caso $1/0$ nel quale bisogna osservare in che modo la funzione al denominatore tende a 0 per poter concludere qualcosa. Infatti se al denominatore c'è una funzione che tende a zero assumendo sempre valori positivi vicino a zero allora il limite è $+\infty$ mentre se assume sempre valori negativi allora il limite è $-\infty$ e, in generale, il limite non esiste se la funzione tende a zero oscillando continuamente tra valori positivi e valori negativi.

Esempio 13.24 Si ha che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ non esiste, mentre $\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{|1-x^2|-1} = -\infty$ e $\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-1}{|1+x|} = +\infty$.

Non vale il viceversa della proprietà del valore assoluto, cioè può accadere che $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \alpha > 0$ senza che la funzione f abbia limite (esibire un esempio per esercizio). **Esercizio**: dimostrare che tuttavia se uno dei due limiti (della funzione o del suo valore assoluto) è 0 allora si ha l'equivalenza, cioè

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0;$$

per rendersene conto basta scrivere le definizioni di limite nei due casi e osservare che risultano identiche.

Capitolo 14

Funzioni continue

Siano $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$.

Definizione 14.1 *Sia $x_0 \in D$. Se x_0 è isolato allora si dice che f* è continua *in x_0. Se x_0 è un punto di accumulazione di D allora si dice che f* è continua *in x_0 se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si dice che f è continua in D *se è continua in ogni punto di D.*

Esercizio 14.2 *Scrivere la definizione di funzione continua " in termini di ε e δ utilizzando la definizione di limite.*

Utilizzando le proprietà algebriche dei limiti stabilite nel teorema 13.22 si verifica facilmente che somma, prodotto e valore assoluto di funzioni continue sono funzioni continue e che il quoziente di funzioni continue è una funzione continua nel proprio dominio naturale (cioè dove non si annulla la funzione al denominatore).

Esempi di funzioni continue

Le funzioni elementari che abbiamo studiato nel capitolo 9 sono continue nel loro dominio. In particolare sono continue le funzioni potenza ad esponente intero e quindi i polinomi e le funzioni razionali, le funzioni circolari seno, coseno e tangente e le loro inverse, la funzione valore assoluto; per alcune di esse vedremo la dimostrazione in dettaglio. Un esempio di funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che non è continua in un punto è dato da

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

essa non è continua in $x_0 = 0$ poiché in tal punto non esiste il limite.

Dal punto di vista grafico si può pensare che una funzione **definita su un intervallo** sia continua se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio. Questa proprietà tuttavia non è più vera se il dominio di f è costituito dall'unione di due o più intervalli. Infatti, per esempio, la funzione segno, introdotta nell'esempio 13.18, è continua in ogni punto del suo dominio, ma non è possibile disegnarne il grafico senza staccare la penna dal foglio. Un altro esempio è costituito dalla funzione $f :]0, 1] \cup]2, 3[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ per ogni x.

Continuità delle funzioni costanti

Le funzioni costanti sono continue in ogni punto del dominio. Infatti, se $f(x) = c$ per ogni x allora $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ per ogni x, x_0 ed $\varepsilon > 0$. Quindi la definizione di continuità è soddisfatta per qualsiasi scelta di δ.

Continuità di potenze, polinomi e funzioni razionali

Le potenze ed i polinomi sono funzioni continue in ogni punto. Infatti, la funzione identità $f(x) = x$ è continua in ogni punto x_0 perché, preso $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, si ha che $|x - x_0| < \varepsilon$ implica $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$. Di conseguenza anche le funzioni potenza $f(x) = x^n$ sono continue come prodotti di funzioni continue.

I polinomi $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ sono funzioni continue come somma di funzioni continue.

Le funzioni razionali, essendo quozienti di polinomi, sono funzioni continue in ogni punto in cui il denominatore non si annulla.

Funzioni lipschitziane

Definizione 14.3 *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice* lipschitziana *se esiste una costante $M \geq 0$ tale che è soddisfatta la seguente* condizione di Lipschitz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \tag{14.1}$$

per ogni $x_1, x_2 \in A$.

Esercizio 14.4 *Mostrare che*

1. *$f : A \to \mathbb{R}$ è lipschitziana se e solo se*

$$\sup\Big\{\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \;:\; x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2\Big\} = L < +\infty.$$

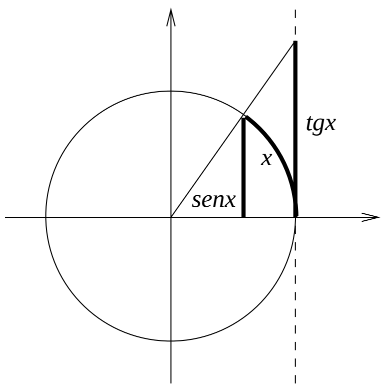
2. se f è lipschitziana allora esiste

$$\min\{M \; : \; |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \; \forall x_1, x_2 \in A\} = L$$

Questa L è la più piccola costante per cui vale la condizione di Lipschitz (14.1) *ed è detta* costante di Lipschitz*.*

Esercizio 14.5 *Mostrare che le funzioni lipschitziane sono continue nel proprio dominio.*

Allora seno e coseno sono funzioni continue, infatti, con semplici considerazioni geometriche si vede che valgono le disuguaglianze



(14.2) $\quad |\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \quad \forall\, |x| < \pi/2.$

Infatti, se $0 < x < \pi/2$, come si vede dalla figura, risulta

(14.3) $\qquad 0 < \operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x.$

Se invece $x \in] - \pi/2, 0[$, sostituendo x con $-x > 0$ nella (14.3) e poiché seno e tangente sono funzioni dispari, si ha

$$0 < -\operatorname{sen} x \leq -x \leq -\operatorname{tg} x$$

che, riunita con la (14.3), fornisce la (14.2).

Tenendo conto della disuguaglianza

$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si ha

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left|2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}\right| \leq 2\left|\operatorname{sen} \frac{x-y}{2}\right| \leq |x - y|$$

cioè vale una condizione di Lipschitz con costante $L = 1$.

Analogamente si può provare la continuità del coseno. Infine, essendo quozienti di funzioni continue, anche tangente e cotangente sono continue sul relativo dominio.

Osservazione 14.6 Non tutte le funzioni continue sono lipschtziane. È facile infatti provare (esercizio) che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è lipschitziana.

Esempi ed esercizi

Esempio 14.7 Il $\lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x+1}$, considerato nell'esempio 13.9, è ora facilmente calcolabile. La funzione $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$ è razionale e quindi continua sul proprio dominio. Il punto 1 appartiene al dominio di f e quindi $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$, riottenendo più facilmente quanto già provato in precedenza.

Esercizio 14.8 *Studiare la continuità delle funzioni*

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\le 1\\ 3-2x^2 & \text{se } x>1,\end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\le 1\\ 3-x^2 & \text{se } x>1.\end{cases}$$

Esercizio 14.9 *Determinare tutti i numeri reali a per i quali è continua in $\mathbb{R}$ la funzione*

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\le 1\\ 3-2ax^2 & \text{se } x>1.\end{cases}$$

Per ogni $x\neq 1$ la funzione è un polinomio, pertanto è continua. Rimane da stabilire la continuità nel punto $x_0=1$. In base alla definizione, la funzione risulta continua in tale punto qualora

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \quad \text{cioè} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 2. \tag{14.4}$$

Avendosi

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3-2a$$

allora vale la (14.4) se e solo se

$$2 = 3-2a \quad \Longleftrightarrow \quad a = 1/2.$$

La funzione risulta dunque continua in ogni punto di $\mathbb{R}$ solo per $a=1/2$.

Esercizio 14.10 [††] *Data la funzione*

$$f(x)=\begin{cases} x-\alpha & \text{se } x\le 0\\ |\beta-x^2| & \text{se } x>0,\end{cases}$$

1. *dire se per $\alpha=\beta=-1$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa;*

[††] *1.* f è invertibile ed $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f^{-1}(y)=y-1$ se $y\le 1$ e $f^{-1}(y)=\sqrt{y-1}$ se $y>1$; *2.* f è continua per tutti gli α e β che soddisfano l'equazione $\alpha+|\beta|=0$; *3.* f è invertibile per tutti gli α e β che soddisfano le condizioni $\alpha=\beta$ e $\beta<0$.

2. *determinare per quali valori di α e β la funzione f è continua;*

3. *tra i valori di α e β trovati al punto precedente determinare quelli per cui f risulta invertibile.*

Esercizio 14.11 *Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ con legge*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + ax & \textit{se } x < 0 \\ a + x^2 & \textit{se } x \geq 0 \end{cases}$$

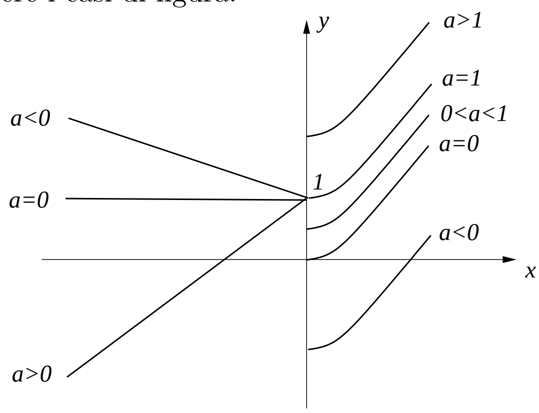
dove a è un parametro reale.

1. *Dire per quali valori di a la funzione è invertibile e per quali di essi risulta $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;*

2. *dire se per $a = 2$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa;*

3. *determinare per quali valori di a, se ne esistono, la funzione è continua in ogni punto.*

1. Conviene distinguere i casi di figura:



Come si vede, la funzione risulta iniettiva, e quindi invertibile, per ogni $a \geq 1$. Tra questi valori di a, l'unico per cui si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ è $a = 1$.

2. Per $a = 2$ la funzione è invertibile. Per determinare la legge della funzione inversa occorre risolvere le equazioni

$$y = 2 + x^2 \text{ per } x \geq 0$$

e
$$y = 1 + 2x \text{ per } x < 0.$$
Avendosi
$$y = 2+x^2 \text{ per } x \geq 0 \iff x^2 = y - 2 \text{ per } x \geq 0 \text{ e } y-2 \geq 0 \iff x = \sqrt{y-2} \text{ per } y \geq 2$$
e
$$y = 1+2x \text{ per } x < 0 \iff x = \frac{y-1}{2} \text{ per } \frac{y-1}{2} < 0 \iff x = \frac{y-1}{2} \text{ per } y < 1$$
allora $f^{-1} :]-\infty, 1[\cup[2, +\infty[\to \mathbb{R}$ con legge
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2} & \text{se } y < 1 \\ \sqrt{y-2} & \text{se } y \geq 2 \end{cases}$$

3. Per come è definita, la funzione è continua per ogni $x \neq 0$ qualunque sia a. Per decidere per quali valori di a risulta continua anche nel punto $x = 0$ occorre calcolare (se esiste) il $\lim_{x\to 0} f(x)$ e confrontarlo con $f(0)$. Poiché
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (a + x^2) = a$$
mentre
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 + ax) = 1 \quad \forall\, a \in \mathbb{R},$$
allora il limite per $x \to 0$ esiste se e solo se $a = 1$ ed è uguale a $1 = f(0)$ e pertanto f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 1$.

Esercizio 14.12 *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione con la seguente proprietà: esiste una costante $H > 0$ tale che*
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq H|x_1 - x_2|^{1/2} \quad \forall\, x_1, x_2 \in A;$$
(f si dice hölderiana *di esponente $1/2$). Dimostrare che f è continua in A.*

Per definizione di funzione continua, basta verificare che
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ :\ x_1, x_2 \in A,\ |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$
e a tal scopo basta scegliere $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2/H^2$.

Esercizio 14.13 Fornire un esempio di funzione hölderiana di esponente $1/2$.

Capitolo 15

Limiti in forma indeterminata

Non dimostriamo il teorema 13.22, ma ci occupiamo invece dei casi esclusi dall'enunciato, cioè delle cosiddette forme indeterminate. In questi casi non si può affermare nulla, a priori, sull'esistenza del limite o sul suo eventuale valore. Vediamo alcuni esempi.

Esercizio 15.1 *Calcolare, se esiste, il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{-2n^2 + 5n - 6}.$$

Il numeratore si presenta nella forma $\infty - \infty$ ma, raccogliendo n, si può scrivere come $n(3n-2)+1$ e quindi tende a $+\infty$; analogamente il denominatore tende a $-\infty$. Non sono quindi applicabili le regole algebriche del teorema 13.22: si tratta di una forma indeterminata del tipo ∞/∞. Dividendo numeratore e denominatore per n^2 si ha

$$\frac{3n^2 - 2n + 1}{-2n^2 + 5n - 6} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-2 + \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2}}.$$

Ora il numeratore tende a 3 e il denominatore a -2, pertanto, per la regola del prodotto, la successione converge a $-3/2$.

Osservazione 15.2 In generale si ha (se $p, q \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, $a_p \neq 0 \neq b_q$)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p > q \text{ e } \dfrac{a_p}{b_q} > 0 \\ -\infty & \text{se } p > q \text{ e } \dfrac{a_p}{b_q} < 0 \\ 0 & \text{se } q > p \\ \dfrac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q. \end{cases}}$$

Infatti, raccogliendo n^p al numeratore ed n^q al denominatore e poi dividendo numeratore e denominatore per n^q si ha

$$\frac{n^{p-q}\big(a_p + a_{p-1} n^{-1} + \cdots + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}\big)}{b_q + b_{q-1} n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-q} + b_0 n^{-q}}$$

e passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene l'asserto.

Esercizio 15.3 *Mostrare che non esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} n$$

(che si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$).

Esercizio 15.4 *Le altre forme indeterminate sono $\infty - \infty$ e $0/0$. Mostrare con opportuni esempi che anche in questi casi non si può dire nulla, a priori, sull'esistenza o meno del limite e sul suo eventuale valore.*

Esercizio 15.5 *Calcolare* $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big)$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Razionalizziamo il numeratore moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Si ha

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

Esercizio 15.6 *Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{3x^2 + 4x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\big)$;
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$;
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 + 2}}{x + 1}$;
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \big(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\big)$.

2. La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e quindi ha senso considerare il limite per $x \to 0$ che si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{3x^2+4x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{3x^2+4x} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{3x+4} = \frac{1}{4},$$
$$\lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{3x^2+4x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-x}{3x^2+4x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-1}{3x+4} = -\frac{1}{4},$$

pertanto il limite non esiste.
3. La funzione è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi ha senso considerare il limite per $x \to 0$ che si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Si ha

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty,$$

pertanto la funzione ha limite $-\infty$.
4. La funzione è definita per tutti gli $x > 0$ e quindi ha senso parlare di limite per $x \to +\infty$. Esso si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Portando tutto sotto il medesimo segno di radice

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

e, osservato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1,$$

usando il teorema 13.22 (limite del quoziente) e la continuità della radice si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1.$$

5. La funzione è definita per tutti gli $x \neq -1$ e quindi ha senso parlare di limite per $x \to -\infty$. Esso si presenta nella forma indeterminata ∞/∞. Osserviamo che sarebbe sbagliato scrivere

$$\frac{\sqrt[4]{x^2+2}}{x+1} = \frac{\sqrt[4]{x^2+2}}{\sqrt[4]{(x+1)^4}}$$

poiché $\sqrt[4]{(x+1)^4} = |x+1|$ che è diverso da $x+1$ quando $x+1$ è negativo, cioè quando $x < -1$, cosa di cui dobbiamo tenere conto quando consideriamo il limite per $x \to -\infty$. Per avere un denominatore positivo basta moltiplicarlo per -1, e scrivere cioè la funzione nella forma

$$\frac{\sqrt[4]{x^2+2}}{x+1} = -\frac{\sqrt[4]{x^2+2}}{-(x+1)} = -\frac{\sqrt[4]{x^2+2}}{\sqrt[4]{(x+1)^4}} = -\sqrt[4]{\frac{x^2+2}{(x+1)^4}}.$$

Poiché ora

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{(x+1)^4} = 0$$

allora, per la continuità della radice, il limite è zero.

Calcolo di limiti per confronto

È facile dimostrare il seguente teorema di confronto.

Teorema 15.7 (del confronto o dei carabinieri) *Siano* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, *ed esista un intorno* I_{x_0} *di* x_0 *tale che*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in A \cap I_{x_0},\ x \neq x_0.$$

Allora si ha

1. *se esistono i limiti per* $x \to x_0$ *delle tre funzioni allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x) \leq \lim_{x\to x_0} h(x);$$

2. $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$;
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$;
4. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

Dimostrazione Esercizio.

Osservazione 15.8 Il teorema precedente si può estendere ai limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Scriverne gli enunciati per esercizio.

Osservazione 15.9 Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e g è una funzione limitata (cioè $\exists M > 0 : |g(x)| \leq M\ \forall x$) allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0. \tag{15.1}$$

Infatti, in tal caso, si ha

$$0 \leq |f(x)g(x)| \leq M|f(x)|$$

e poiché $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$ allora per confronto si ottiene

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)g(x)| = 0,$$

equivalente alla (15.1).

Esercizio 15.10 *Calcolare, se esiste, il*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n}.$$

Il limite è zero perché la successione può riguardarsi come prodotto della successione limitata $\operatorname{sen} n$ e di quella *infinitesima* $1/n$ (il termine “infinitesima significa “tendente a zero).

Esempio 15.11 La funzione $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mostriamo che si ha

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1} \qquad (\textbf{fondamentale}).$$

Osserviamo che sia il numeratore che il denominatore tendono a 0. Dunque il rapporto si presenta nella forma indeterminata 0/0. Se $0 < x < \pi/2$, dividendo la (14.3) per $\operatorname{sen} x$, si ha

$$1 \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

cioè

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1. \tag{15.2}$$

E per $x \in]-\pi/2, 0[$? Proviamo a cambiare x con $-x$ nella (15.2) e vediamo cosa succede. Poiché il coseno è funzione pari e il seno dispari, si ha

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

ma allora

$$\cos(-x) \leq \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \leq 1$$

e quindi la (15.2) vale anche per $-\pi/2 < x < 0$, cioè vale in un intervallo di centro 0 privato del punto 0. Ma allora la tesi segue dal teorema del confronto passando al limite per $x \to 0$ nella (15.2).

Esercizio 15.12 *Verificare che*

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$*;*

2. $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2}$ **fondamentale**.

1. Basta scrivere la definizione di $\operatorname{tg} x$ e usare il limite fondamentale dell'esempio 15.11.
2. Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo $0/0$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $1 + \cos x$ si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 15.13 *Calcolare, se esiste, il limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^{\alpha/2}}{\operatorname{sen}^\alpha |x|}$$

al variare del parametro reale α*.*

Capitolo 16

Limiti e continuità delle funzioni composte

Limiti di funzioni composte

Considerate due funzioni $g : A \to B$, $f : B \to \mathbb{R}$ con A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ ed x_0 punto di accumulazione di A in $\overline{\mathbb{R}}$, supponiamo che

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \in B'$,

(ii) $\lim_{y \to y_0} f(y) = \ell$.

Ci chiediamo se in tal caso si possa affermare che

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell. \tag{16.1}$$

Si vede subito che le cose possono andare male prendendo ad esempio $g(x) = y_0$ per ogni x in un intorno di x_0 e

$$f(x) = \begin{cases} \ell & \text{se } y \neq y_0 \\ \ell + 1 & \text{se } y = y_0, \end{cases}$$

infatti in tal caso le ipotesi *(i)* e *(ii)* sono soddisfatte ma si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(y_0)) = \ell + 1 \neq \ell.$$

Bisognerà quindi aggiungere un'ulteriore ipotesi per evitare controesempi di questo tipo, i cui principali ingredienti sono il fatto che in ogni intorno di

y_0 esistano punti diversi da x_0 in cui g assume il valore y_0 ed il fatto che f è discontinua in y_0. I teoremi seguenti mostrano che se si impedisce che accada uno di questi due fatti allora vale la (16.1).

Teorema 16.1 *Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, $g : A \to B$, $f : B \to \mathbb{R}$ ed x_0 punto di accumulazione di A in $\overline{\mathbb{R}}$. Se*

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0 \in B'$,

(ii) $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = l$,

(iii) *esiste un intorno I di x_0 tale che $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$,*

allora

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Dimostrazione L'ipotesi (ii) equivale a

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(l)\ \exists\, V \in \mathcal{U}(y_0)\ :\ f(B \cap V \setminus \{y_0\}) \subseteq U \tag{16.2}$$

e (i) equivale a

$$\forall\, V \in \mathcal{U}(y_0)\ \exists\, W \in \mathcal{U}(x_0)\ :\ g(A \cap W \setminus \{x_0\}) \subseteq V. \tag{16.3}$$

Sia $Z = W \cap I$. Come intersezione di intorni di x_0, Z è ancora un intorno di x_0 e, per la (16.3) e l'ipotesi (iii), si ha

$$g(A \cap Z \setminus \{x_0\}) \subseteq B \cap V \setminus \{y_0\}$$

e quindi, per la (16.2), si ha

$$f(g(A \cap Z \setminus \{x_0\})) \subseteq U.$$

Abbiamo quindi provato che, per ogni $U \in \mathcal{U}(l)$ esiste $Z \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che $f(g(A \cap Z \setminus \{x_0\})) \subseteq U$, cioè la tesi. □

Esercizio 16.2 *Scrivere la dimostrazione in termini di ε e δ nel caso in cui $x_0, y_0, l \in \mathbb{R}$.*

Dimostrare per esercizio che il teorema vale anche se alla (iii) si sostituisce l'ipotesi che f sia definita e continua in y_0. Vale cioè il seguente teorema.

Teorema 16.3 *Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, $g : A \to B$, $f : B \to \mathbb{R}$ ed x_0 punto di accumulazione di A in $\overline{\mathbb{R}}$. Se*

(i) $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \in B'$,

(ii) $\lim_{y \to y_0} f(y) = l$,

(iii') $y_0 \in B$ *ed* f *è continua in* y_0,

allora

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = l.$$

Cambiamento di variabile nei limiti

Il teorema ora dimostrato permette di effettuare cambiamenti di variabile nei limiti. Infatti, dovendo calcolare il limite (che supponiamo esistere)

$$\lim_{y \to y_0} f(y)$$

si può porre $y = g(x)$ e, purché $g(x) \to y_0$ per $x \to x_0$ e soddisfi la condizione *(iii)* o la *(iii')*, per il teorema precedente, si ha

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = \lim_{x \to x_0} f(g(x))$$

e siamo così passati da un limite nella variabile y ad un limite nella nuova variabile x.

Esercizio 16.4 *Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:*

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$; *2.* $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x) - x^2}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo $0/0$. Osserviamo che

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} \cos 5x$$

e, ricordando che $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e usando il teorema sul limite di una funzione composta, si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \frac{5x}{\operatorname{sen} 5x} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

2. Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo 0/0. Si può osservare che
$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha x) - x^2}{x} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} - \frac{x^2}{x} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} - x.$$
Pertanto, se $\alpha \neq 0$, si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x) - x^2}{x} = \lim_{x\to 0} \Big[\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x}\alpha - x\Big] = \alpha,$$
dove nell'ultimo passaggio sono stati usati il teorema sul limite di una funzione composta ed il fatto che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha x} = 1.$$
Se invece $\alpha = 0$, allora
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x) - x^2}{x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$
Quindi, in definitiva,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x) - x^2}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Composizione di funzioni continue

Come corollario del precedente teorema 16.3 sul limite di una funzione composta si ottiene il seguente teorema di continuità della funzione composta di funzioni continue.

Teorema 16.5 *Sia $g : A \to B$ una funzione continua in un punto $x_0 \in A$ e $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $y_0 = g(x_0)$. Allora $f \circ g$ è continua in x_0.*

Limiti di funzioni mediante le successioni

Teorema 16.6 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione di A in $\overline{\mathbb{R}}$. Si ha*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$
se e solo se per ogni successione x_n di punti di $A\setminus\{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ risulta $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

DIMOSTRAZIONE Diamo la dimostrazione nel caso $l, x_0 \in \mathbb{R}$, lasciando per esercizio le opportune variazioni negli altri casi.
($\Rightarrow$). Basta applicare il teorema 16.1 sul limite di una funzione composta al caso in cui $g(x)$ è la successione (x_n).
($\Leftarrow$) Supponiamo che

$$x_n \in A \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l$$

ma che, per assurdo, non si abbia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. Allora

$$\exists\, \varepsilon > 0\ :\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, x_\delta \neq x_0,\ |x_\delta - x_0| < \delta\ :\ |f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon.$$

Preso $\delta = 1/n$ si ha

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_n \neq x_0,\ |x_n - x_0| < 1/n\ :\ |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

Avremmo allora trovato una successione $x_n \to x_0$ ma tale che $f(x_n)$ non tende ad l, contraddicendo l'ipotesi. □

Parte intera di un numero reale

Dato un numero reale x, si chiama *parte intera di* x, e si indica con $[x]$ il più grande numero intero minore o uguale di x, cioè

$$[x] = \max\{p \in \mathbb{Z}\ :\ p \leq x\}.$$

Esercizio 16.7 *Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(x - [x]\big)$;
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$;
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

1. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, e quindi ha senso parlare di limite per $x \to +\infty$. Esso si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. Sulla successione $x_n = n$ si ha

$$f(x_n) = x_n - [x_n] = n - [n] = 0$$

mentre sulla successione $y_n = n + \dfrac{1}{2}$ si ha invece

$$f(y_n) = n + \frac{1}{2} - [n + \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$$

ed entrambe le successioni tendono a $+\infty$. Per il Teorema 16.6 il limite non esiste.

Sottosuccessioni

Definizione 16.8 *Sia (a_n) una successione; diremo che (a_{n_k}) è una* sotto-successione *di (a_n) se la successione di numeri naturali*

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ k &\mapsto n_k \end{aligned}$$

è strettamente crescente.

Si osservi che la successione (a_{n_k}) è il risultato della composizione (come funzioni) di (a_n) e di (n_k), cioè

$$(a_{n_k}) = (a_n) \circ (n_k).$$

Teorema 16.9 *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *$a_n \to \ell$;*
2. *ogni sottosuccessione (a_{n_k}) di (a_n) tende a ℓ;*
3. *ogni sottosuccessione (a_{n_k}) ha una sotto-sottosuccessione $(a_{n_{k_j}})$ che tende a ℓ.*

Dimostrazione *1* $\Rightarrow$ *2* e *2* $\Rightarrow$ *3* seguono direttamente dal precedente Teorema 16.6. Rimane da dimostrare che *3* $\Rightarrow$ *1*. Consideriamo il caso $l \in \mathbb{R}$ (quelli $\ell = \pm\infty$ si trattano in maniera analoga, svilupparli per esercizio). Supponiamo per assurdo che (a_n) non converga ad ℓ, cioè che

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ :\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n_k > k \ :\ |a_{n_k} - \ell| \geq \varepsilon. \tag{16.4}$$

A questo punto, se la successione (n_k) fosse crescente, allora (a_{n_k}) sarebbe una sottosuccessione di (a_n) che non ammette alcuna sottosuccessione convergente ad ℓ, e cioè sarebbe in contraddizione contro l'ipotesi *3*.

La monotonia di (n_k) non è garantita semplicemente dalla (16.4), ma si può usare la (16.4) per ottenere, per induzione, una (n_k) strettamente crescente. Infatti, applicando la (16.4) con $k = 1$ si ha che esiste $n_1 > 1$ tale che $|a_{n_1} - \ell| \geq \varepsilon$. Applicandola di nuovo con $k = n_1$ si ha che esiste $n_2 := n_{n_1} > n_1$ tale che $|a_{n_2} - \ell| \geq \varepsilon$. n_3 si troverà poi applicando la (16.4) con $k = n_2$, e così via. □

Il precedente teorema può essere utilmente applicato per mostrare che una successione non ha limite.

Esempio 16.10 Se $\alpha < -1$ non esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n.$$

Infatti si ha

$$a_n = (-1)^n |\alpha|^n$$

ed essendo $|\alpha| > 1$ allora $a_{2n} \to +\infty$ (infatti per la disuguaglianza di Bernoulli si ha $|\alpha|^{2n} \geq 1 + 2n(|\alpha| - 1)$ e l'affermazione segue per confronto) mentre $a_{2n+1} \to -\infty$ e la successione non ha limite.

Esercizio 16.11 *Dimostrare che le seguenti successioni non hanno limite.*

1. $a_n = \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$;
2. $a_n = n\left(1 + (-1)^n\right)$;
3. $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} n$;
4. $a_n = n^{1+(-1)^n}$.

Esercizio 16.12 *Dimostrare che valgono le identità seguenti*

1. $\operatorname{sen}(n+2) - \operatorname{sen} n = 2\cos(n+1)\operatorname{sen} 1$,
2. $\cos(n+2) - \cos n = 2\operatorname{sen}(n+1)\operatorname{sen} 1$,

ed utilizzarle per dimostrare che le successioni $a_n = \operatorname{sen} n$ e $b_n = \cos n$ non hanno limite.

La prima parte è lasciata per esercizio. Veniamo alla seconda. Supponiamo per assurdo che esista il

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = \lambda.$$

Passando al limite nella *1.* si ha allora

$$\lim_{n\to\infty} \cos n = 0$$

e passando al limite nella *2.* si trova

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} n = 0,$$

ma ciò è assurdo perchè allora seguirebbe

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{sen}^2 n + \cos^2 n) = 0$$

contro il fatto che $\operatorname{sen}^2 n + \cos^2 n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 16.13 *Calcolare, qualora esista, il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2+x^2}}{x^{-3/2}}.$$

Il limite del numeratore si presenta in forma indeterminata $\infty - \infty$. Osservato che, per ogni $x > 0$

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}-\sqrt[4]{2+x^2} &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt[4]{2+x^2})(\sqrt{x}+\sqrt[4]{2+x^2})}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{2+x^2}} \\
&= \frac{x-\sqrt[2]{2+x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{2+x^2}} = \frac{(x-\sqrt{2+x^2})(x+\sqrt{2+x^2})}{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{2+x^2})(x+\sqrt{2+x^2})} \\
&= \frac{-2}{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{2+x^2})(x+\sqrt{2+x^2})}
\end{aligned}$$

allora si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[4]{2+x^2}}{x^{-3/2}} &= \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{-2}{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{2+x^2})(x+\sqrt{2+x^2})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \frac{-2}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}+1})x(1+\sqrt{\frac{2}{x^2}+1})} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{(1+\sqrt[4]{\frac{2}{x^2}+1})(1+\sqrt{\frac{2}{x^2}+1})} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Capitolo 17

Minimo e massimo limite

Definizione con gli intorni

Definizione 17.1 *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione e* x_0 *un punto di accumulazione di* A *in* $\overline{\mathbb{R}}$. *Si definiscono*

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) = \sup_{U\in\mathcal{U}(x_0)} \inf_{x\in U\cap A\setminus\{x_0\}} f(x)$$
$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) = \inf_{U\in\mathcal{U}(x_0)} \sup_{x\in U\cap A\setminus\{x_0\}} f(x)$$

e sono detti, rispettivamente, massimo e minimo limite di f *per* $x \to x_0$.

Esercizio 17.2 *Mostrare che si ha*

$$\operatorname*{minlim}_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = -1, \qquad \operatorname*{maxlim}_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = 1,$$

e

$$\operatorname*{minlim}_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = -1, \qquad \operatorname*{maxlim}_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 1$$

Ricordiamo che non esistono i limiti $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ *e* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

In termini di palle

Come succedeva per il limiti usuali, nelle definizioni di massimo e minimo limite, anzichè tutti gli intorni di x_0 si possono considerare solo gli ε-intorni di x_0 (che indicheremo con B_ε), cioè si ha

Proposizione 17.3 *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione e* x_0 *un punto di accumulazione di* A *in* $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x),$$
$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x).$$

Dimostrazione Dimostriamo, ad esempio, che questo è vero per il minimo limite lasciando l'altro caso per esercizio. Cominciamo con l'osservare che, poiché sussiste l'inclusione

$$\{\inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) \ : \ \varepsilon > 0\} \subseteq \{\inf_{x\in U\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) \ : \ U \in \mathcal{U}(x_0)\}$$

allora

$$\sup\{\inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) \ : \ \varepsilon > 0\} \le \sup\{\inf_{x\in U\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) \ : \ U \in \mathcal{U}(x_0)\},$$

cioè

$$\sup_{U\in\mathcal{U}(x_0)} \inf_{x\in U\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) \ge \sup_{\varepsilon>0} \inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x).$$

Per provare che vale l'uguaglianza supponiamo per assurdo che invece valga la disuguaglianza stretta. In tal caso, utilizzando la seconda proprietà caratteristica del sup si prova facilmente (esercizio) che esiste $U \in \mathcal{U}(x_0)$ tale che

$$\inf_{x\in U\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) > \sup_{\varepsilon>0} \inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x).$$

Allora $\inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) < \inf_{x\in U\cap A\setminus\{x_0\}} f(x)$ per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi non può essere $B_\varepsilon \subseteq U$ per alcun $\varepsilon > 0$, contro il fatto che U è un intorno di x_0. $\square$

Limsup e liminf

Osservato che

- $\varepsilon \mapsto \inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x)$ è una funzione decrescente,
- $\varepsilon \mapsto \sup_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x)$ è una funzione crescente,

allora per il teorema 13.20 sui limiti delle funzioni monotone si ha che

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \inf_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x),$$

$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup_{x\in B_\varepsilon\cap A\setminus\{x_0\}} f(x)$$

e per questo motivo, spesso, anziché minlim si scrive liminf e al posto di maxlim si scrive limsup.

Caratterizzazione in termini di ε e δ

Se x_0 ed l sono finiti, valgono le seguenti caratterizzazioni in termini di ε e δ (dimostrarle per esercizio)

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) = l$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \text{(i) } \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ :\ x\in A,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow l-\varepsilon<f(x) \\ \text{(ii) } \forall\,\varepsilon>0\ \forall\,\delta>0\ \exists\,x_\delta\in A\ :\ 0<|x_\delta-x_0|<\delta \text{ e } f(x_\delta)<l+\varepsilon; \end{cases}$$

$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) = l$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \text{(i) } \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ :\ x\in A,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<l+\varepsilon \\ \text{(ii) } \forall\,\varepsilon>0\ \forall\,\delta>0\ \exists\,x_\delta\in A\ :\ 0<|x_\delta-x_0|<\delta \text{ e } l-\varepsilon<f(x_\delta). \end{cases}$$

Esistenza del limite

È interessante osservare che mentre il limite di f in x_0 può non esistere, invece il massimo e il minimo limite esistono sempre, dal momento che esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}}$ gli estremi superiore e inferiore dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che compaiono nella definizione. Per confronto tra i limiti per $\varepsilon\to 0^+$ si ha che

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) \le \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x).$$

Vale inoltre il seguente teorema.

Teorema 17.4 *Si ha*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) = \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) = l.$$

Dimostrazione Esercizio.

Massimo e minimo limite di una successione

Riconoscere, per esercizio, che nel caso delle successioni le definizioni di massimo e minimo limite diventano, rispettivamente

$$\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n>k} a_n = \lim_{k\to+\infty} \inf_{n>k} a_n$$

$$\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n>k} a_n = \lim_{k\to+\infty} \sup_{n>k} a_n$$

Esercizi

Esercizio 17.5 *Dimostrare che*

1. $\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} a_n = \min\{\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \ : \ \textit{esiste una sottosuccessione } a_{n_k} \to \lambda\}$;
2. $\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} a_n = \max\{\lambda \in \overline{\mathbb{R}} \ : \ \textit{esiste una sottosuccessione } a_{n_k} \to \lambda\}$.

Esercizio 17.6 *Dimostrare che vale la seguente caratterizzazione sequenziale del minimo e del massimo limite di una funzione:*

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) = \min\{\operatorname*{minlim}_{n\to\infty} f(x_n) \ : \ x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\, \forall n \in \mathbb{N}\},$$
$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) = \max\{\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} f(x_n) \ : \ x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0\, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio 17.7 *Il teorema del confronto per i limiti di funzioni vale nella forma più generale: – se $f \leq g$ in un intorno di x_0 allora*

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) \leq \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} g(x),$$
$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) \leq \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} g(x)$$

Esercizio 17.8 *Dimostrare che si ha*

$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) = -\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} \big(-f(x)\big).$$

Esercizio 17.9 *Dimostrare le seguenti disuguaglianze e mostrare con esempi che possono essere strette.*

1. $\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} \big[f(x)+g(x)\big] \leq \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) + \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} \big[f(x)+g(x)\big] \geq \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) + \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} g(x)$;

3. $\operatorname*{minlim}_{x\to x_0}\big[f(x)+g(x)\big] \le \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} f(x) + \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} g(x).$

Esercizio 17.10 *Discutere l'affermazione seguente. Siano f, g funzioni definite in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, e*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in R.$$

Allora

$$\operatorname*{maxlim}_{x\to x_0}(f+g)(x) = \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} f(x) + \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} g(x).$$

Capitolo 18

Successioni definite per induzione

Abbiamo già visto che certe successioni, come ad esempio x^n oppure $n!$ si possano definire per induzione, ponendo

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = g(n, a_n). \end{cases}$$

dove $g; \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione. Tuttavia, non tutte le funzioni g definiscono una successione di numeri reali. Ad esempio, infatti,

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 - 2a_n}. \end{cases}$$

non è una buona definizione, dal momento che $a_2 = \sqrt{1 - a_1} = 1$, ma $a_3 = \sqrt{1 - a_2} = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

Esercizio 18.1 *Mostrare che è ben definita e studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}. \end{cases}$$

Per induzione si vede subito che si ha

$$2 + a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1,$$

pertanto la successione è ben definita. Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \sqrt{2} > a_1, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > a_2, \quad a_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > a_3.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo per induzione. Dobbiamo provare che $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Per $n = 1$, $a_2 \geq a_1$ è vera.
Supponiamola vera per n e la dimostriamo per $n + 1$. Essendo $a_{n+1} \geq a_n$ allora

$$a_{n+2} = \sqrt{2 + a_{n+1}} \geq \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}.$$

Quindi, per induzione la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$a_n \to L = \sup a_n.$$

Passando al limite ambo i membri di

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

si ha dunque

$$L = \sqrt{2 + L}$$

cioè, elevando al quadrato, risolvendo in L, e osservando che $L \geq 0$ si ha $L = 2$ oppure $L = +\infty$. Ora osserviamo che se il limite è 2 allora, siccome la successione è crescente, deve succedere che $a_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Se invece il limite è $+\infty$, allora deve essere $a_n > 2$ per tutti gli n abbastanza grandi. Per induzione si dimostra che $a_n \leq 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, pertanto il limite è 2.

Esercizio 18.2 *Mostrare che è ben definita e studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + 2 \\ a_{n+1} = (a_n - \frac{1}{n})^n + \frac{1}{n+1}, \end{cases}$$

con $\alpha \geq 0$.

La successione è ben definita perchè la funzione potenza ad esponente naturale è definita su tutto $\mathbb{R}$. Scriviamo alcuni valori della successione.

$$a_1 = \alpha + 2, \ a_2 = (\alpha + 1)^2 + \frac{1}{2}, \ a_3 = (\alpha + 1)^6 + \frac{1}{3}, \ a_4 = (\alpha + 1)^{24} + \frac{1}{4}$$

e ci viene il sospetto che sia

$$a_n = (\alpha + 1)^{n!} + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{18.1}$$

Lo dimostriamo per induzione.

Per $n = 1$, $a_1 = (\alpha + 1)^1 + 1 = \alpha + 2$ è vera.
Per ipotesi di induzione supponiamo ora che

$$a_n = (\alpha + 1)^{n!} + \frac{1}{n};$$

allora

$$a_{n+1} = (a_n - \frac{1}{n})^n + \frac{1}{n+1} = \big((\alpha+1)^{n!}\big)^{n+1} + \frac{1}{n+1} = (\alpha+1)^{(n+1)!} + \frac{1}{n+1},$$

e la (18.1) è quindi vera per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si ha dunque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Big((\alpha + 1)^{n!} + \frac{1}{n+1}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \ , \end{cases}$$

dal momento che, per la disuguaglinza di Bernoulli, si ha

$$(\alpha + 1)^{n!} \geq (\alpha + 1)^n \geq 1 + n\alpha$$

e quindi, se $\alpha > 0$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha + 1)^{n!} = +\infty$ per confronto.

Esercizio 18.3 *Data la successione (a_n) definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n(2 + 3a_n)}{4(a_n + 1)} \end{cases}$$

1. *dimostrare che la successione è limitata inferiormente;*
2. *studiarne la monotonia;*
3. *studiarne il comportamento al limite per $n \to \infty$.*

1. Si prova per induzione che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
2. La successione è decrescente. Infatti

$$a_n > a_{n+1} \iff a_n > \frac{a_n(2 + 3a_n)}{4(a_n + 1)} \iff a_n > -2$$

che è vero perchè $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
3. Essendo decrescente e inferiormente limitata la successione ammette limite finito l. Passando al limite nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n(2 + 3a_n)}{4(a_n + 1)}$$

si deve quindi avere

$$l = \frac{l(2+3l)}{4(l+1)}$$

che ha le due soluzioni $l = 0$ oppure $l = -2$. Poichè i termini della successione sono tutti positivi non può essere $l = -2$ e pertanto a_n converge a 0.

Esercizio 18.4 *Sia (a_n) la successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1). \end{cases}$$

1. *Dimostrare che $a_n \leq \dfrac{n}{1+n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*
2. *dimostrare che (a_n) è monotona;*
3. *studiare il comportamento al limite, per $n \to \infty$.*

1. Lo proviamo per induzione. $a_1 = 0 < 1/2$ è vero. Supponiamo vero che $a_n \leq \dfrac{n}{1+n}$ e dimostriamo che $a_{n+1} \leq \dfrac{n+1}{2+n}$. Per definizione di a_{n+1} e per l'ipotesi di induzione

$$a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1) \leq \frac{n}{1+2n}\left(\frac{n}{1+n} + 1\right) = \frac{n}{1+n} \leq \frac{n+1}{2+n}$$

dove l'ultima disuguaglianza si verifica direttamente in quanto equivale a $n(2+n) \leq (1+n)^2$ che, semplificando, diviene $0 \leq 1$.
2. Poichè $a_2 = 1/3 > a_1$, $a_3 = 8/15 > a_2$, $a_4 = 23/35 > a_3$, la successione sembra essere crescente. Dimostriamo quindi che

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Per definizione di a_{n+1} è equivalente provare che

$$a_n \leq \frac{n}{1+2n}(a_n + 1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

che, dopo le opportune semplificazioni, diventa

$$a_n \leq \frac{n}{1+n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

provata precedentemente.

3. La successione è crescente e superiormente limitata (si osservi infatti che $\dfrac{n}{1+n} \leq 1$) e quindi ha limite $l \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $n \to \infty$ nella

$$a_{n+1} = \frac{n}{1+2n}(a_n + 1)$$

si ottiene l'equazione

$$l = \frac{1}{2}(l+1)$$

che ha l'unica soluzione $l = 1$. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Esercizio 18.5 *Sia*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 4}{2a_n}. \end{cases} \tag{1}$$

1. *Dimostrare che le* (1) *definiscono per induzione una successione* (a_n) *di numeri reali.*
2. *Dimostrare che* $a_n > 2$ *per ogni* $n \geq 2$.
3. *Dimostrare che la successione è decrescente da* $n = 2$ *in poi.*
4. *Discutere la convergenza di* (a_n) *e calcolarne l'eventuale limite.*

1. Basta dimostrare che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e questo si può fare per induzione. Infatti $a_1 \neq 0$ mentre $a_n \neq 0$ implica $a_n^2 + 4 \neq 0$ e quindi $a_{n+1} \neq 0$.

2. Lo dimostriamo per induzione. Si ha $a_2 = 5/2 > 2$. Supponiamo che $a_n > 2$ e proviamo che $a_{n+1} > 2$. Infatti ciò equivale a

$$\frac{a_n^2 + 4}{2a_n} > 2 \iff a_n^2 + 4 > 4a_n \iff (a_n - 2)^2 > 0 \iff a_n \neq 2$$

e l'ultima proposizione della catena di equivalenze è vera per ipotesi di induzione.

3. Infatti

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_n^2 + 4}{2a_n} < a_n \iff a_n^2 + 4 < 2a_n^2 \iff a_n^2 > 4$$

e questo è vero per ogni $n \geq 2$.

4. Per il teorema sul limite delle successioni monotone la successione è convergente ad un limite finito l. Passando al limite nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n}$$

si ottiene

$$l = \frac{l^2 + 4}{2l}$$

che ha le soluzioni $l = \pm 2$. Poichè d'altra parte $a_n > 2$ per ogni $n \geq 2$ ne consegue che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2.$$

Esercizio 18.6 *Studiare il comportamento al limite della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt[4]{2 + a_n^2} \end{cases}$$

Poiché

$$2 + a_n^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora la successione è ben definita. Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \sqrt[4]{2} > a_1, \quad a_3 = \sqrt[4]{2 + \sqrt{2}} > a_2, \quad a_4 = \sqrt[4]{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} > a_3.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo per induzione. Dobbiamo provare che $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Per $n = 1$, $a_2 \geq a_1$ è vera.
Supponiamola vera per n e la dimostriamo per $n + 1$. Essendo $a_{n+1} \geq a_n$ allora

$$a_{n+2} = \sqrt[4]{2 + a_{n+1}^2} \geq \sqrt[4]{2 + a_n^2} = a_{n+1}.$$

Quindi, per induzione la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$a_n \to L = \sup a_n.$$

Passando al limite ambo i membri di

$$a_{n+1} = \sqrt[4]{2 + a_n^2}$$

si ha dunque

$$L = \sqrt[4]{2 + L^2}$$

cioè, elevando alla quarta, risolvendo in L, e osservando che $L \geq 0$, si ha $L = \sqrt{2}$ oppure $L = +\infty$. Ora osserviamo che se il limite è $\sqrt{2}$ allora, siccome la successione è crescente, deve succedere che $a_n \leq \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Se invece il limite è $+\infty$, allora deve essere $a_n > \sqrt{2}$ per tutti gli n abbastanza grandi. Per induzione si dimostra che $a_n \leq \sqrt{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e pertanto il limite è $\sqrt{2}$.

Esercizio 18.7 *Studiare il comportamento al limite della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2}. \end{cases}$$

Cominciamo con l'osservare che $a_2 = 1/2 > a_1$, $a_3 = 5/8 > a_2$. Si può dimostrare che la successione è crescente per induzione, oppure osservando che

$$a_{n+1} \geq a_n \iff \frac{a_n^2 + 1}{2} \geq a_n \iff (a_n - 1)^2 \geq 0$$

e che quest'ultima è vera per ogni n.

Ne consegue che la successione ammette limite λ, finito o infinito.

D'altra parte la successione è superiormente limitata. Si dimostra infatti facilmente per induzione che 1 è un maggiorante. Ne consegue che $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora passando al limite per $n \to \infty$ nella

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$$

si ottiene

$$2\lambda = \lambda^2 + 1 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1.$$

Pertanto

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1.$$

Esercizio 18.8 *Studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione (a_n) definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{2}{n}. \end{cases}$$

Capitolo 19

Teoremi notevoli sulle funzioni continue

Il teorema degli zeri

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, gli elementi $a \in A$ tali che $f(a) = 0$ sono detti *zeri* di f.

Teorema 19.1 (di esistenza degli zeri di una funzione continua) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se*

$$f(a) < 0 \quad \text{e} \quad f(b) > 0$$

(oppure se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$) allora esiste $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = 0$ (cioè esiste almeno uno zero di f).

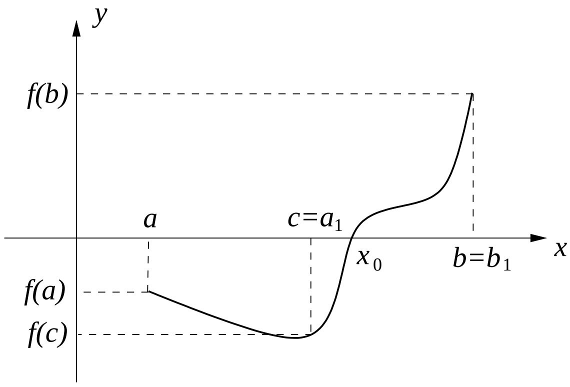
L'interpretazione geometrica del teorema è evidente. Supponiamo per fissare le idee che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora il punto $(a, f(a))$ sta sotto l'asse delle ascisse mentre il punto $(b, f(b))$ sta sopra. Poiché f è continua sull'intervallo $[a, b]$, il suo grafico deve connettere questi due punti e deve quindi necessariamente attraversare almeno una volta l'asse delle ascisse. Nei punti di attraversamento la funzione assume proprio il valore 0.

Dimostrazione La dimostrazione si basa sul cosiddetto metodo di bisezione. Sia

$$c = \frac{a + b}{2}$$

il punto medio dell'intervallo $[a, b]$. Se $f(c) = 0$ ci possiamo fermare perché abbiamo trovato uno zero. Altrimenti tra i due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ scegliamo quello sui cui estremi la funzione assume valori di segno discorde (cioè il primo se $f(c) > 0$, il secondo se $f(c) < 0$), lo chiamiamo $[a_1, b_1]$ e osserviamo che esso ha ampiezza pari alla metà dell'intervallo iniziale, cioè

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$



Questo intervallo soddisfa $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Ripetendo il ragionamento dall'inizio, detto

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

se $f(c_1) = 0$ abbiamo trovato uno zero, altrimenti consideriamo tra i due intervalli $[a_1, c_1]$ e $[c_1, b_1]$ quello sui cui estremi la funzione assume valori di segno discorde e lo chiamiamo $[a_2, b_2]$. Si ha

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Ora possiamo ripetere il ragionamento per questo intervallo e così via. In questo modo, se non si trova uno zero prima, si vengono a costruire, per induzione, due successioni (a_n) e (b_n) che soddisfano, per ogni $n \in \mathbb{N}$, le condizioni

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0$$

e

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{19.1}$$

Per costruzione, la successione (a_n) è crescente, cioè

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

ed è limitata perché tutti i suoi elementi appartengono all'intervallo $[a, b]$. Per il teorema sul limite delle successioni monotone, (a_n) ammette un limite finito che chiamiamo x_0. Per la relazione (19.1) anche (b_n) converge ad x_0. Per la continuità di f si ha allora

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{e} \quad f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$$

cioè $f(x_0) = 0$ ed il teorema è provato. □

Osservazione 19.2 Può effettivamente succedere che non si trovi uno zero in un numero finito di passi, per esempio se $[a, b] = [0, 2]$ e $f(x) = x^2 - 2$ in quanto $x_0 = \sqrt{2}$ è irrazionale mentre i punti di bisezione sono tutti razionali.

Il teorema vale anche se l'intervallo su cui è definita la funzione non è chiuso, oppure non è limitato, per esempio $]a, b[$ oppure $]-\infty, +\infty[$ oppure $]a, +\infty[$, e in tal caso i valori $f(a)$ e $f(b)$ vanno sostituiti con i corrispondenti limiti da destra e da sinistra o all'infinito.

Oltre che provare l'esistenza di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$, la dimostrazione del teorema degli zeri fornisce anche un metodo per approssimarne una. Infatti le successioni a_n e b_n tendono alla soluzione x_0. Per n grande esse forniscono dunque delle approssimazioni per difetto e per eccesso, rispettivamente, di x_0. Più precisamente, dalla dimostrazione segue che

$$\left.\begin{array}{l} |a_n - x_0| \\ |b_n - x_0| \end{array}\right\} \leq |b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}.$$

Quindi sostituendo a x_0 il valore a_n oppure b_n si commette un errore inferiore a $(b-a)/2^n$. Tale errore diventa sempre più piccolo al crescere di n e quindi a_n e b_n forniscono delle approssimazioni di x_0 sempre più precise.

Esercizio 19.3 *Mostrare che l'equazione*

$$2x^3 + 3x - 3 = 0$$

ha una ed una sola soluzione reale. Calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a 2^{-4}.

Sia $f(x) = 2x^3+3x-3$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ed f è continua, allora per il teorema degli zeri la funzione f assume il valore zero almeno una volta. Inoltre f è strettamente crescente in quanto somma di funzioni strettamente crescenti ($g(x) = 2x^3$ ed $h(x) = 3x - 3$), quindi f è biiettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Pertanto l'equazione

$$2x^3 + 3x - 3 = 0$$

ha una ed una sola soluzione x_0. Inoltre si osserva che tale soluzione appartiene all'intervallo aperto $]0,1[$ poiché è

$$f(0) = -3 < 0 \quad \text{ed} \quad f(1) = 2 > 0.$$

Per dare un valore di x_0 approssimato a meno di 2^{-4} utilizziamo il metodo di bisezione. Si ha

$$\begin{aligned}
&f(\tfrac{1}{2}) < 0 \quad \text{quindi } x_0 \text{ è compreso tra } \frac{1}{2} \text{ ed } 1;\\
&f(\tfrac{3}{4}) > 0 \quad \text{quindi } x_0 \text{ è compreso tra } \frac{1}{2} \text{ e } \frac{3}{4};\\
&f(\tfrac{5}{8}) < 0 \quad \text{quindi } x_0 \text{ è compreso tra } \frac{5}{8} \text{ e } \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Assumendo come valore approssimato di x_0 il punto medio z_0 dell'intervallo $[5/8, 3/4]$, ossia $z_0 = 11/16 = 0,6875$ si ha

$$|x_0 - z_0| < \frac{3}{4} - \frac{11}{16} = \frac{1}{16} = 2^{-4}.$$

Esercizio 19.4 *Mostrare che l'equazione* $2x^5+3x-3 = 0$ *ha una ed una sola soluzione reale. Calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a* 2^{-4}.

Esercizio 19.5 *Dimostrare che l'equazione*

$$x^6 + 3\sqrt{|x|} - 5 = 0$$

ha due soluzioni reali e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$.

Cominciamo con l'osservare che la funzione $f(x) = x^6 + 3\sqrt{|x|} - 5$ è pari, quindi se x_0 è uno zero di f anche $-x_0$ lo è. Inoltre $f(0) = -5$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Poichè f è continua su $\mathbb{R}$, per il Teorema degli Zeri esiste uno zero di f in $]0,+\infty[$ ed è anche unico perchè f è strettamente crescente in $]0,+\infty[$ in quanto somma di funzioni (strettamente) crescenti. Ne consegue che gli zeri di f in $\mathbb{R}$ sono due, uno positivo x_0 e uno negativo $-x_0$. È sufficiente trovare un valore approssimato per lo zero positivo in quanto per ottenere l'altro basterà cambiare di segno.

Poichè $f(1) = -1$ e $f(2) > 0$, allora, indicato con x_0 lo zero positivo di f, si ha $x_0 \in]1,2[$. Poichè $f(3/2) > 0$ allora si ha $x_0 \in]1,3/2[$, e assumendo $5/4$ come valore approssimato per x_0 si ha che l'errore è minore di $1/4$. Un valore approssimato con la stessa accuratezza per l'altro zero di f, cioè $-x_0$ è, naturalmente, $-5/4$.

Esercizio 19.6 *Dimostrare, senza usare il calcolatore, ma servendosi eventualmente di considerazioni geometriche, che*

$$\operatorname{arctg} 2 > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dimostrare poi che l'equazione

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$.

Poichè l'arcotangente è crescente si ha

$$\operatorname{arctg} 2 > \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

e, d'altra parte

$$\frac{\pi}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

infatti quest'ultima equivale a $\pi > 2\sqrt{2}$ che è vera in quanto π è maggiore di 3 mentre $2\sqrt{2}$ è minore di 3.

La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ è continua in $]0, +\infty[$, e inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi per il Teorema degli Zeri esiste almeno uno zero di f in $]0, +\infty[$ ed è anche unico perchè f è strettamente crescente in quanto somma di funzioni (strettamente) crescenti.

Poichè $f(1) = \pi/4 - 1 < 0$ e $f(2) = \operatorname{arctg} 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$, allora, indicato con x_0 lo zero di f, si ha $x_0 \in]1, 2[$. Poichè $f(3/2) > 0$ allora si ha $x_0 \in]1, 3/2[$, e assumendo $5/4$ come valore approssimato per x_0 si ha che l'errore è minore di $1/4$.

Esercizio 19.7 *a. Dimostrare che per ogni valore reale del parametro* α *esiste una soluzione positiva dell'equazione*

$$1 + \alpha x = x^4$$

e che essa è unica.

b. Chiamata $\psi(\alpha)$ tale soluzione determinare il codominio, le proprietà di monotonia e il limite per $\alpha \to 0$ e per $\alpha \to +\infty$ della funzione $\psi : \alpha \to \psi(\alpha)$.

c. Che relazione c'è tra $\psi(\alpha)$ e la funzione $\varphi(\alpha)$ ottenuta considerando analogamente le soluzioni negative?

Teorema dei valori intermedi

Teorema 19.8 *Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. f assume tutti i valori strettamente compresi tra $\inf\limits_{]a,b[} f$ e $\sup\limits_{]a,b[} f$.*

DIMOSTRAZIONE Sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $\inf\limits_{]a,b[} f < c < \sup\limits_{]a,b[} f$. Allora esistono $\alpha, \beta \in]a,b[$ tali che $f(\alpha) < c$ e $f(\beta) > c$. Allora la funzione $g(x) = f(x) - c$ soddisfa alle ipotesi del teorema degli zeri nell' intervallo di estremi α e β. Infatti g è continua al pari di f e

$$g(\alpha)g(\beta) = \big(f(\alpha) - c\big)\big(f(\beta) - c\big) < 0.$$

Dunque esiste un punto x_0 appartenente all'intervallo di estremi α e β, e quindi ad $]a,b[$ tale che $g(x_0) = 0$ e quindi, per definizione di g, si ha $f(x_0) = c$. $\square$

Naturalmente il teorema vale anche se il dominio di f è un intervallo chiuso o semiaperto, perché vale per la restrizione di f alla parte interna di tale intervallo.

Continuità della funzione inversa

Teorema 19.9 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e strettamente crescente (risp. decrescente). Allora*

1. *l'immagine di f è un intervallo $[c,d]$ di $\mathbb{R}$;*

2. *l'applicazione $f : [a,b] \to [c,d]$ è biiettiva e la sua inversa $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ è continua e strettamente crescente (risp. decrescente).*

Teoremi analoghi si possono enunciare nel caso di funzioni definite su un intervallo aperto $]a,b[$ nel qual caso l'immagine è anch'essa un intervallo aperto $]c,d[$, e nel caso di funzioni definite su intervalli semiaperti $]a,b]$ (o

$[a, b[$), anche non limitati. In questi casi, se f è crescente allora l'immagine è un intervallo $]c, d]$, (risp. $[c, d[$) mentre se f è decrescente allora l'immagine è $[c, d[$ (risp. $]c, d]$).

Dimostrazione *1.* Sia $c = f(a)$ e $d = f(b)$. Poichè f è crescente si ha che $f([a, b]) \subseteq [c, d]$. Proviamo che vale anche l'inclusione opposta $[c, d] \subseteq f([a, b])$, cioè che per ogni punto $y \in [c, d]$ esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = y$. Se $y = c$ allora prenderemo $x = a$ (poichè $f(a) = c$) e se $y = d$ possiamo prendere $x = d$. Nel caso $c < y < d$ basta applicare il Teorema degli Zeri alla funzione continua

$$g(x) = f(x) - y$$

che ne soddisfa le ipotesi, infatti $g(a) = c - y < 0$ e $g(b) = d - y > 0$; esiste dunque $x \in]a, b[$ tale che $g(x) = 0$, cioè $f(x) = y$ (alternativamente avremmo potuto applicare il teorema dei valori intermedi direttamente ad f).

2. Essendo strettamente monotona, f è iniettiva, e quindi biiettiva sull'immagine, cioè come funzione da $[a, b]$ in $[c, d]$. Pertanto esiste l'inversa $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$; resta da provare che f^{-1} è continua. Poichè f è strettamente crescente, anche f^{-1} è strettamente crescente (cfr. esercizio 3.58) e pertanto esistono i limiti da destra e da sinistra in ogni punto (dimostrarlo per esercizio). Supponiamo per assurdo che f^{-1} non sia continua in un punto $w \in]c, d[$; allora avremmo che

$$\lim_{y \to w^-} f^{-1}(y) < \lim_{y \to w^+} f^{-1}(y)$$

Poichè f è strettamente crescente si avrebbe allora

$$f\big(\lim_{y \to w^-} f^{-1}(y)\big) < f\big(\lim_{y \to w^+} f^{-1}(y)\big)$$

e poichè f è continua allora

$$\lim_{y \to w^-} f\big(f^{-1}(y)\big) < \lim_{y \to w^+} f\big(f^{-1}(y)\big)$$

cioè

$$\lim_{y \to w^-} y < \lim_{y \to w^+} y$$

da cui seguirebbe l'assurdo $w < w$. Analogamente si ragiona se $w = c$ (nel qual caso il limite da sinistra viene sostituito da $f^{-1}(c) = a$) e se $w = d$ (il limite da destra viene sostituito da $f^{-1}(d) = b$). $\square$

Come conseguenza si ha che le radici sono funzioni continue in quanto inverse delle funzioni ad esponente naturale, e le potenze ad esponente razionale sono continue come composte di funzioni continue.

Teorema di monotonia

Teorema 19.10 *Sia $f : [a, b] \to [c, d]$ continua e suriettiva. f è iniettiva (quindi biiettiva) se e solo se f è strettamente monotona.*

Dimostrazione La necessità segue dal teorema della funzione inversa. Proviamo la sufficienza, cioè che se f è biiettiva allora è strettamente monotona. Supponiamo per assurdo che f non sia strettamente monotona. Allora devono esistere tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ tali che

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ e } f(x_2) > f(x_3)$$

oppure

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ e } f(x_2) < f(x_3)$$

(le uguaglianze non possono valere perchè f è biiettiva). In ogni caso si perviene ad una contraddizione. Infatti, se consideriamo per esempio il primo dei due casi, con il Teorema degli Zeri è facile mostrare che ogni valore $y \in]\max\{f(x_1), f(x_3)\}, f(x_2)[$ viene assunto dalla funzione almeno una volta tra x_1 e x_2 e tra x_2 e x_3, e pertanto f non può essere biettiva. □

Potenza ad esponente reale

La definizione più generale di potenza che finora abbiamo visto è quella ad esponente razionale x^r, $r \in \mathbb{Q}$ il cui dominio naturale è l'intervallo $]0, +\infty[$. Fissato $x > 0$, sia $\theta : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ la funzione $\theta(r) = x^r$.

Definizione 19.11 *Siano $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $x > 0$. Definiamo*

$$x^a = \lim_{r \to a,\, r \in \mathbb{Q}} x^r := \lim_{r \to a} \theta(r)$$

Naturalmente, affinchè quella appena data sia una buona definizione, è necessario preoccuparsi di provare che il limite esiste. Questo si può fare, per esempio per gli $x > 1$, secondo lo schema seguente

1. provare che la funzione θ è crescente (su $\mathbb{Q}$);

2. allora si ha che esistono

$$\lim_{r\to a^-} \theta(r) = \sup\{x^r \ : \ r \in \mathbb{Q}, \ r < a\}$$

e

$$\lim_{r\to a^+} \theta(r) = \inf\{x^r \ : \ r \in \mathbb{Q}, \ r > a\}$$

e inoltre

$$\lim_{r\to a^-} \theta(r) \le \lim_{r\to a^+} \theta(r).$$

3. si prova che $\lim_{r\to a^-} \theta(r) \ge \lim_{r\to a^+} \theta(r)$ ossia che

$$\sup\{x^r \ : \ r \in \mathbb{Q}, \ r < a\} \ge \inf\{x^r \ : \ r \in \mathbb{Q}, \ r > a\} \tag{19.2}$$

per esempio mostrando che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due numeri razionali r_1 e r_2 con $r_1 < a < r_2$ tali che

$$x^{r_2} - x^{r_1} < \varepsilon.$$

Osservazione 19.12 Nel caso $0 < x < 1$ la funzione θ è decrescente. Adattare i punti 2. e 3. a questo caso per esercizio.

Si può infine provare che per la potenza ad esponente reale così definita valgono le medesime proprietà che sussistono per quella ad esponente razionale. Questo può essere fatto facilmente per esercizio approssimando gli esponenti reali con successioni di numeri razionali.

Continuità della potenza ad esponente reale

Sfruttando la definizione e la continuità della potenza ad esponente razionale si prova agevolmente che la funzione x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, è continua su $]0, +\infty[$. Consideriamo dapprima $\alpha > 0$ e $x_0 \in]1, +\infty[$ (gli altri casi si tratteranno analogamente, con le opportune modifiche) e $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tali che

$$r_1 < \alpha < r_2 \ \text{ e } \ x_0^{r_2} - x_0^{r_1} < \varepsilon.$$

Per la monotonia di $\theta(r) = x^r$ in $\mathbb{Q}$ e per definizione di x^α si ha inoltre che per ogni $r, s \in \mathbb{Q}$ tali che $r_1 \le r < \alpha < s \le r_2$ risulta $x_0^s - x_0^r < \varepsilon$ e

$$x^r \le x^\alpha \le x^s \quad \forall x \in]1, +\infty[, \ \forall r_1 \le r < \alpha < s \le r_2.$$

Ne consegue che

$$\operatorname*{minlim}_{x\to x_0} x^r \le \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} x^\alpha \le \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} x^\alpha \le \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} x^s.$$

D'altra parte, per la continuità in x_0 di x^r e x^s, si ha

$$\lim_{x\to x_0} x^r = x_0^r \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} x^s = x_0^s$$

e pertanto

$$x_0^r \le \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} x^\alpha \le \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} x^\alpha \le x_0^s.$$

Ricordando che $x_0^s - x_0^r < \varepsilon$, allora

$$0 \le \operatorname*{maxlim}_{x\to x_0} x^\alpha - \operatorname*{minlim}_{x\to x_0} x^\alpha < \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, segue che esiste il limite per $x \to x_0$ di x^α e soddisfa le stime

$$x_0^r \le \lim_{x\to x_0} x^\alpha \le x_0^s \quad \forall\, r_1 \le r < \alpha < s \le r_2.$$

Passando al limite per $r \to \alpha^-$ su $\mathbb{Q}$ e per $s \to \alpha^+$ su $\mathbb{Q}$ si ottiene infine, per definizione di potenza ad esponente reale, che

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha.$$

Funzione esponenziale

Utilizzando la potenza ad esponente reale si può definire la funzione esponenziale.

Definizione 19.13 *Sia $a > 0$. La funzione esponenziale con base a è la funzione $\exp_a$, definita da*

$$\exp_a x = a^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Chiameremo "funzione esponenziale (senza specificare la base) l'esponenziale avente per base il numero e *di Neper che verrà introdotto in un capitolo seguente; la denoteremo con* exp.

Monotonia dell'esponenziale

Proposizione 19.14 *La funzione esponenziale con base a è strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.*

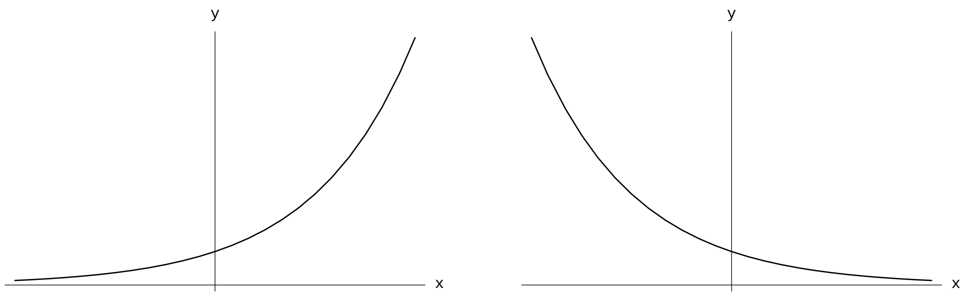
DIMOSTRAZIONE Sia $a > 1$ (il caso $a < 1$ è analogo). Sappiamo già che a^r è crescente su $\mathbb{Q}$, che è denso in $\mathbb{R}$, e quindi, per ogni coppia di reali $x_1 < x_2$ esiste una coppia di razionali r_1 e r_2 tali che

$$x_1 < r_1 < r_2 < x_2.$$

Per definizione di potenza ad esponente reale si ha

$$a^{x_1} \leq a^{r_1} < a^{r_2} \leq a^{x_2}$$

e quindi $a^{x_1} \leq a^{x_2}$. □



a^x per $a > 1$ $\qquad$ a^x per $0 < a < 1$

Continuità dell'esponenziale

Proposizione 19.15 *La funzione esponenziale con base a è continua in $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE Sia $a > 1$. Poichè a^x è crescente su $\mathbb{R}$ allora per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esistono finiti

$$\lim_{x \to x_0^-} a^x = \sup\{a^x \ : \ x < x_0\} \ \leq \ \lim_{x \to x_0^+} a^x = \inf\{a^x \ : \ x > x_0\}$$

e basta quindi dimostrare che

$$\sup\{a^x \ : \ x < x_0\} \ \geq \ \inf\{a^x \ : \ x > x_0\}$$

ma questo segue dalla (19.2) poichè

$$\begin{aligned}&\sup\{a^x \ : \ x \in \mathbb{R}, x < x_0\} \geq \sup\{a^x \ : \ x \in \mathbb{Q}, \ x < x_0\} = \\ &= \inf\{a^x \ : \ x \in \mathbb{Q}, \ x > x_0\} \geq \ \inf\{a^x \ : \ x \in \mathbb{R}, x > x_0\}.\end{aligned}$$

□

Proprietà dell'esponenziale

Siano $x > 0$, $y > 0$ e a numeri reali. Dalle analoghe proprietà della potenza ad esponente reale discendono le seguenti proprietà dell'esponenziale.

$$\begin{array}{ll} \text{prodotto} & a^x a^y = a^{x+y}, \\ \text{composizione} & (a^x)^y = a^{xy}, \\ \text{reciproco} & a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}. \end{array}$$

Inversione dell'esponenziale. Logaritmo

Se $a = 1$, la funzione $\exp_a$ è costante e quindi non invertibile; se $a \neq 1$ $\exp_a$ è strettamente monotona, crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \end{cases}$$

pertanto, essendo continua, il Teorema 19.9 assicura che l'immagine è l'intervallo $]0, +\infty[$ ed $\exp_a$ risulta biiettiva e quindi invertibile da $\mathbb{R}$ in $]0, +\infty[$.

Definizione 19.16 *Sia $a > 0$, $a \neq 1$. L'inversa di* $\exp_a$

$$\log_a := \left(\exp_a\right)^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

è detta logaritmo in base a*. Scriveremo* log *per indicare il logaritmo in base* e*, detto anche* logaritmo naturale.

Per definizione di funzione inversa si ha dunque

$$\log_a a^x = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall\, x > 0.$$

e inoltre il logaritmo è una funzione continua su tutto il suo dominio in quanto inversa di una funzione continua.

Proprietà dei logaritmi

Dalle proprietà degll'esponenziale seguono le proprietà dei logaritmi (naturalmente le basi si suppongono > 0 e $\neq 1$ e le variabili appartenenti ai domini delle funzioni in cui compaiono)

$$\begin{aligned}
&\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \\
&\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y \\
&\log_a x^y = y \log_a x \\
&\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x} \quad \text{(formula del cambiamento di base).}
\end{aligned}$$

Verifichiamo la prima, le altre essendo lasciate per esercizio. Poichè l'esponenziale in base $a > 0$, $a \neq 1$, è biiettiva, si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \Longleftrightarrow \quad a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

e, per le proprietà di funzione inversa e per quella del prodotto, si ha poi

$$a^{\log_a(xy)} = xy,$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy,$$

ottenendo quindi che

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \Longleftrightarrow \quad xy = xy$$

che afferma che la formula è vera in quanto equivalente ad una proposizione vera.

In figura sono riportati il grafico del logaritmo (in nero) e quelli dell'esponenziale e della retta $y = x$ (in grigio).
Come conseguenza della monotonia, se $a > 1$ si ha

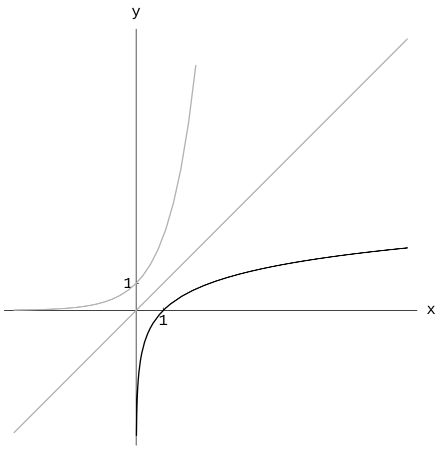
$$0 < x < y \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x < \log_a y,$$

mentre se $0 < a < 1$ si ha

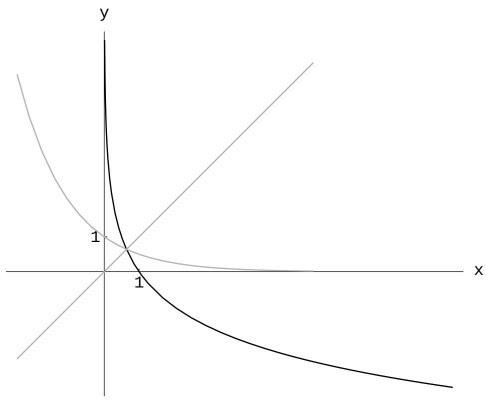
$$0 < x < y \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a x > \log_a y.$$

Esercizio 19.17 *Della seguente funzione, determinare il dominio "naturale (cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui è definita) e l'immagine, dire se è invertibile, e in caso affermativo trovare l'inversa. Altrimenti invertirne le restrizioni ad opportuni sottoinsiemi del dominio.*

$$f(x) = \sqrt{\log x}.$$



$\log_a x$ per $a > 1$



$\log_a x$ per $0 < a < 1$

Esercizio 19.18 *Risolvere l'equazione* $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

Affinché le operazioni indicate abbiano senso deve essere $x > 0$ e l'equazione equivale a

$$a^{\sqrt{x}\log_a x} = a^{x\log_a \sqrt{x}}$$

con $a > 0$, $a \neq 1$, fissato. Poiché la funzione esponenziale è iniettiva, questo equivale a

$$\sqrt{x}\log_a x = x\log_a \sqrt{x}$$

cioè a

$$\sqrt{x}\big(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\big)\log_a x = 0$$

che ha come soluzioni $x = 1$ e $x = 4$.

Esercizio 19.19 *Risolvere la disequazione* $\log_2(2+x) \leq 2\log_4(2-x)$.

Affinché i logaritmi abbiano senso devono essere soddisfatte le condizioni $2+x > 0$ e $2-x > 0$, equivalenti a $-2 < x < 2$. Con la formula del cambiamento di base

$$\log_4(2-x) = \frac{\log_2(2-x)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2-x)}{2},$$

quindi l'equazione diventa equivalente a

$$\log_2(2+x) \leq \log_2(2-x).$$

Poiché l'esponenziale e il logaritmo in base 2 sono funzioni strettamente crescenti, allora la disequazione data è equivalente a

$$2 + x \leq 2 - x, \quad x \in]-2, 2[$$

cioè a

$$2x \leq 0, \quad x \in]-2, 2[$$

che ha come soluzione l'insieme degli x tali che $-2 < x \leq 0$.

Funzioni iperboliche

Le funzioni *coseno iperbolico*, *seno iperbolico*, *tangente iperbolica* e *cotangente iperbolica* sono definite come segue

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2},$$
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}, \ x \neq 0.$$

La relazione fondamentale tra il seno ed il coseno iperbolico, simile a quella tra seno e coseno, è

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Inversione delle funzioni iperboliche

Si può verificare che il seno iperbolico è una funzione biiettiva tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}$, il coseno iperbolico tra $\mathbb{R}^+$ e l'insieme $\{x \ : \ x \geq 1\}$ e la tangente iperbolica tra $\mathbb{R}$ e l'intervallo $]-1, 1[$. Le corrispondenti funzioni inverse sono dette *settore*[1] *seno iperbolico, settore coseno iperbolico* e *settore tangente iperbolica.* Si ha inoltre:

$$\operatorname{setsenh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$
$$\operatorname{setcosh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$
$$\operatorname{settgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right).$$

[1] Su molti altri testi le inverse delle funzioni iperboliche sono chiamate, con abuso di linguaggio, arcoseno, arcocoseno e arcotangente iperbolica.

Esercizi

Esercizio 19.20 *Dimostrare che il numero* $\log_2 10 + \log_8 3$ *è irrazionale.*

Supponiamo per assurdo che $\log_2 10 + \log_8 3 \in \mathbb{Q}$, cioè che esistano due numeri interi primi tra loro, p e q non nulli tali che

$$\log_2 10 + \log_8 3 = p/q. \tag{19.3}$$

Ricorrendo alla formula del cambiamento di base, e scrivendo tutti i logaritmi nella medesima base 2, il primo membro diventa

$$\log_2 10 + \frac{\log_2 3}{\log_2 8} = \log_2 10 + \frac{\log_2 3}{3}$$

e la (19.3) diventa

$$3q(\log_2 10 + \log_2 3) = 3p$$

che, passando all'esponenziale in base 2, equivale a

$$2^{q(3\log_2 10 + \log_2 3)} = 2^{3p}$$

che a sua volta, utilizzando le proprietà dei logaritmi e dell'esponenziale, equivale a

$$10^{3q} 3^q = 2^{3p}$$

che è necessariamente falsa in quanto il primo membro è divisibile per 3 (o per 5) e il secondo no.

Esercizi

Esercizio 19.21 *Sia* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \textit{ oppure } x = 0 \\ \dfrac{1}{q} & \textit{se } x = \dfrac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \textit{ con } p,\ q \textit{ interi primi tra loro e } q > 0. \end{cases}$$

Dimostrare che f *è continua in* 0 *e sugli irrazionali e discontinua sui razionali. (Suggerimento: dimostrare che* $\lim_{y \to x_0} f(y) = 0\ \forall x_0 \in [0,1]$*).*

Seguendo il suggerimento, cerchiamo di dimostrare che fissato $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ :\ 0 < |y - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y)| < \varepsilon. \tag{19.4}$$

Fissiamo dunque $x_0 \in \mathbb{R}$. Cerchiamo di capire bene cosa dice la (1). Concentriamoci sulla disuguaglianza $|f(y)| < \varepsilon$. Se y è irrazionale o nullo essa è evidentemente soddisfatta, quindi in tal caso la (19.4) non dice nulla. Se y è razionale (e $\neq 0$) e $\frac{p}{q}$ è il suo rappresentante canonico essa diventa $\frac{1}{q} < \varepsilon$, ossia $q > \frac{1}{\varepsilon}$. Quindi la (19.4) si può riscrivere al modo seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ 0 < |\frac{p}{q} - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad q > \frac{1}{\varepsilon}$$

cioè esiste un intorno di x_0 in cui i punti razionali (del tipo $\frac{p}{q}$ con p, q interi primi tra loro) hanno denominatore più grande di $\frac{1}{\varepsilon}$. Questo è quanto dobbiamo provare.

A tal scopo raccogliamo in un unico insieme tutti i numeri razionali che non hanno questa proprietà, cioè sia

$$A = \{\frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \ : \ 0 < q \leq \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

È immediato riconoscere che per $\varepsilon < 1$ l'insieme A è non vuoto e che $\#A < +\infty$. Gli elementi di A sono quelli che dovranno rimanere fuori dall'intorno, quindi definiamo

$$a = \max\{x \in A \ : \ x < x_0\}, \qquad b = \min\{x \in A \ : \ x > x_0\}.$$

Allora è evidente che $x_0 \in]a,b[$ e che se $y = \frac{p}{q} \in]a,b[$ allora $|f(y)| = \frac{1}{q} < \varepsilon$, ossia risulta

$$|f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in]a,b[\setminus \{x_0\}$$

e ciò prova l'asserto.

Esercizio 19.22 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{19.5}$$

Dimostrare che allora si ha

$$f(x) = f(1)x.$$

Osserviamo anzitutto che per la (2) si ha $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$, quindi $f(0) = 0$.

Per induzione si ottiene facilmente che comunque si prendano n punti $(n \geq 2)$ x_1, $x_2, ..., x_n$ si ha

$$f(x_1 + x_2 + ... + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n). \tag{19.6}$$

Abbiamo visto subito che la tesi è vera per $x = 0$. La dimostriamo ora nel caso $x = n \in \mathbb{N}$. Usando la (19.6) si ha

$$f(n) = f(1 + ... + 1) = f(1) + ... + f(1) = nf(1). \tag{19.7}$$

Per riconoscere che la tesi è vera anche per $x \in \mathbb{Z}$ basta osservare che $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$, perchè allora si ha $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$. Cerchiamo ora di dimostrare che la tesi è vera per $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (p e q interi). Questo si può vedere in vari modi; per esempio sfruttando la (19.6) con $x_1 = x_2 = ... = x_q = \frac{p}{q}$ si ha $f(p) = qf(\frac{p}{q})$ che per la (19.7) implica

$$f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1).$$

Dunque la (19.5) è provata per ogni $x \in \mathbb{Q}$. Sia ora $x \in \mathbb{R}$ e sia (x_n) una successione di numeri razionali convergente ad x. Dalla continuità di f si ha

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n f(1) = xf(1).$$

Esercizio 19.23 *Dimostrare che la funzione*

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

è biiettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Calcolare inoltre il limite $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right)$.

La funzione f è strettamente crescente come somma di funzioni crescenti, di cui una strettamente, e continua. La sua immagine è tutto $\mathbb{R}$ perchè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Allora f è biiettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e, per il teorema della funzione inversa, la sua inversa f^{-1} è continua. Poichè $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{3y}{y+4} = 3$ si ha allora

$$\lim_{y\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}(3) = z$$

e, per definizione di f^{-1}, z è l'unica soluzione dell'equazione $z^3 + z + 1 = 3$, cioè $z = 1$.

Esercizio 19.24 *Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'equazione*

$$x^{2n+1} + x + 1 = 0$$

ha una ed una sola soluzione x_n. Dimostrare che si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -1.$$

Indichiamo con $f_n(x) = x^{2n+1} + x + 1$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$$

ed f_n è strettamente crescente in quanto somma di funzioni strettamente crescenti. Per il teorema della funzione inversa allora ogni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è biiettiva, quindi in particolare esiste un unico $x_n \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_n) = 0$, cioè l'equazione data ha soluzione unica. Si ha inoltre $x_n \in]-1, 0[\ \forall n \in \mathbb{N}$ in quanto $f_n(-1) = -1 < 0$ e $f_n(0) = 1 > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Provando a disegnare un grafico qualitativo delle funzioni f_0, f_1 ed f_2 ci si convince facilmente che la successione (x_n) è monotona. Per dimostrarlo formalmente basta osservare che essendo $x_n \in]-1, 0[$ si ha

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{2n+3} + x_n + 1 = x_n^{2n+3} - x_n^{2n+1} > 0$$

da cui segue che $x_{n+1} < x_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Ora, (x_n) essendo monotona e limitata è convergente ad un limite $\lambda \in [-1, 0[$. Se fosse $\lambda > -1$ si avrebbe $x_n^{2n+1} \to 0$ e passando al limite nell'equazione

$$x_n^{2n+1} + x_n + 1 = 0$$

si troverebbe $0 + \lambda + 1 = 0$ cioè $\lambda = -1$ che è assurdo. Poichè l'assurdo proviene dall'aver supposto che $\lambda > -1$ ne consegue che $\lambda = -1$.

Esercizio 19.25 *Dimostrare che non esistono funzioni continue e biiettive da*

(i) $[0, 1]$ *in* $\mathbb{R}$*;*
(ii) $[0, +\infty[$ *in* $]0, 1[$.

(i). Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Poichè $[0, 1]$ è compatto allora per il teorema 5 $f([0, 1])$ è compatto, quindi $f([0, 1])$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$ ed f non può pertanto essere surgettiva.

(ii). Supponiamo per assurdo che $f : [0, +\infty[\to]0, 1[$ sia una funzione continua e biiettiva. Per il teorema di monotonia f è strettamente monotona. Supponiamola crescente. Allora $f(0) = \min f([0, +\infty[)$. Poichè inoltre $f(0) > 0$ allora f non assume mai valori in $]0, f(0)[$, contro la suriettività. Se invece f fosse decrescente allora sarebbe $f(0) = \max f([0, +\infty[) < 1$ e non potrebbe pertanto essere suriettiva.

Esercizio 19.26 *Dimostrare, senza fare uso di calcolatori, che*

$$\log \frac{3}{4} > -\frac{1}{2}.$$

Dimostrare, poi, che l'equazione $\log x = 1 - 2x$ *ha un'unica soluzione* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/8$.

Si ha

$$\log\frac{3}{4} > -\frac{1}{2} \iff \frac{3}{4} > \mathrm{e}^{-1/2} \iff \frac{4}{3} < \mathrm{e}^{1/2} \iff \frac{16}{9} < \mathrm{e}$$

che è vero perchè

$$\mathrm{e} > 2 = \frac{16}{8} > \frac{16}{9}.$$

Osservato che la funzione $f(x) = \log x + 2x - 1$ è continua, e che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il Teorema degli Zeri esiste una soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$ che è anche unica poichè f è strettamente crescente.

Osservato che $f(1) = 1 > 0$ allora si ha $x_0 \in]0, 1[$; poichè $f(1/2) = -\log 2 < 0$ allora si ha $x_0 \in]1/2, 1[$; poichè $f(3/4) = \log(3/4) + 1/2 > 0$ allora si ha $x_0 \in]1/2, 3/4[$ e un valore approssimato di x_0 con l'accuratezza richiesta è quindi $5/8$.

Esercizio 19.27 *Dimostrare che l'equazione*

$$x^3 = 2^{-\sqrt{x+1}}$$

ha un'unica soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$ e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$. Giustificare tutti i passaggi senza fare uso del calcolatore.

L'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$ con

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2^{\sqrt{x+1}}}$$

che è definita sull'intervallo $[-1, +\infty[$, ivi continua e strettamente crescente. Inoltre

$$f(-1) = -2 < 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

quindi il Teorema degli Zeri garantisce l'esistenza di un punto $x_0 \in]-1, +\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ (cioè esiste una soluzione dell'equazione) e l'iniettività di f (conseguenza della stretta monotonia) assicura che x_0 è l'unico zero di f.

Poichè inoltre

$$f(0) = -\frac{1}{2} < 0, \quad f(1) = 1 - \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$$

e $f(1) > 0$, perchè

$$1 - \frac{1}{2^{\sqrt{2}}} > 0 \iff 2^{\sqrt{2}} > 1 \iff \sqrt{2} > 0 \text{ (vero)}$$

allora $x_0 \in]0, 1[$.

Poichè $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{\sqrt{3/2}}} < 0$ in quanto

$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^{\sqrt{3/2}}} < 0 \iff 2^3 > 2^{\sqrt{3/2}} \iff 3 > \sqrt{3/2} \iff 9 > 3/2 \text{ (vero)}$$

allora $x_0 \in]1/2, 1[$ e assumendo $3/4$ come valore approssimato per x_0 si ha che l'errore è minore di $1/4$.

Esercizio 19.28 *Dimostrare che l'equazione*

$$\mathrm{e}^x \sqrt[3]{x} = 1$$

ha un'unica soluzione reale e determinarne un valore approssimato con un errore non superiore ad $1/8$*, senza fare uso del calcolatore.*

L'equazione si può scrivere nella forma equivalente

$$f(x) := \sqrt[3]{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$$

dove la funzione f è continua e strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (come somma di funzioni strettamente crescenti). Poichè $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 - 1/\mathrm{e} > 0$, allora l'esistenza di una soluzione x_0 dell'equazione $f(x) = 0$ nell'intervallo $]0, 1[$ segue dal teorema degli zeri; l'unicità segue poi dal fatto che f è strettamente monotona e quindi iniettiva. Inoltre

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{2}}$$

e risulta

$$f(\frac{1}{2}) > 0$$

poichè

$$\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt[3]{2} > 0 \iff \sqrt{\mathrm{e}} > \sqrt[3]{2} \iff e > 2^{2/3} \iff \mathrm{e}^3 > 2^2 \iff \mathrm{e}^3 > 4$$

che è vero in quanto $\mathrm{e} > 2$ e quindi $\mathrm{e}^3 > 2^3 > 8$. Ne consegue che $x_0 \in]0, 1/2[$. Proseguendo,

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} = \frac{\sqrt[4]{\mathrm{e}} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt{\mathrm{e}}\sqrt[3]{2}}$$

e risulta
$$f(\frac{1}{4}) < 0$$
poichè
$$\sqrt[4]{\mathrm{e}} - \sqrt[3]{4} < 0 \iff \sqrt[4]{\mathrm{e}} < \sqrt[3]{4} \iff e < 4^{4/3} \iff \mathrm{e}^3 < 2^8 = 256$$
che è vero in quanto e $<$ 3 e quindi $\mathrm{e}^3 < 3^3 = 27$. Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 1/4[$. Assumendo 3/8 come valore approssimato per x_0 si commette un errore inferiore ad 1/8.

Esercizio 19.29 *Dimostrare che l'equazione*
$$6^x = \frac{3}{2^x} - 5$$
ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $\frac{1}{4}$*, senza fare uso del calcolatore.*

Posto $f(x) = 6^x - \frac{3}{2^x} + 5$ l'equazione si può scrivere nella forma $f(x) = 0$ le cui soluzioni sono tutti e soli gli zeri di f. Poichè f è strettamente crescente (come somma di funzioni crescenti di cui una strettamente) allora esiste al più uno zero.

Essendo $f(0) = 3 > 0$ e $f(-1) = -5/6 < 0$ allora per il teorema degli zeri esiste uno zero di f (unico per quanto osservato prima) in $]-1, 0[$.

Per calcolarne un valore approssimato con l'accuratezza desiderata applichiamo il metodo di bisezione. Consideriamo dunque
$$f(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{6}} - 3\sqrt{2} + 5$$
e proviamo che è strettamente positivo. Infatti
$$f(-1/2) > 0 \iff 5 > 3\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}$$
e, osservato che il secondo membro è positivo, possiamo elevare tutto al quadrato ottenendo la disuguaglianza equivalente
$$25 > 18 - \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \iff \frac{6}{\sqrt{3}} + \frac{41}{6} > 0$$
che è vera. Dunque, detto x_0 la soluzione dell'equazione, si ha $x_0 \in]-1, -1/2[$, e pertanto un valore approssimato a meno di 1/4 è $x_0 \simeq -3/4$.

Esercizio 19.30 *Mostrare che l'equazione $2^x + x = 0$ ha una ed una sola soluzione reale. Calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a 1/8.*

Detta $f(x) = 2^x + x$ si ha che f è continua su $\mathbb{R}$ e poichè $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ allora per il teorema degli zeri esiste, in $\mathbb{R}$, una soluzione x_0 dell'equazione che è anche unica poichè f è strettamente crescente (in quanto somma di due funzioni strettamente crescenti).

Poiché $f(0) = 1$ e $f(-1) = -1/2$ allora $x_0 \in]-1, 0[$. Poiché $f(-1/2) = (\sqrt{2} - 1)/2 > 0$ allora $x_0 \in]-1, -1/2[$. Poichè $f(-3/4) = \dfrac{4 - 3 \cdot 2^{3/4}}{4 \cdot 2^{3/4}} < 0$ allora $x_0 \in]-3/4, -1/2[$ e quest'ultimo intervallo ha ampiezza 1/4, sicché prendendone il punto medio $-5/8$ come valore approssimato per x_0 l'errore commesso è inferiore a 1/8.

Esercizio 19.31 *Sia x^n la funzione potenza ad esponente naturale definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare, utilizzando qualche noto teorema sulle funzioni continue, che*

1. *se n è pari l'immagine è $[0, +\infty[$;*
2. *se n è dispari l'immagine è $\mathbb{R}$.*

1. per n pari si ha $x^n \geq 0$, quindi l'immagine è contenuta in $[0, +\infty[$. Viceversa occorre dimostrare che per ogni $y \in [0, +\infty[$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$. Fissato un tale y indichiamo con $f_n(x) := x^n - y$. f_n è una funzione continua sul suo dominio. Inoltre

$$f_n(0) = -y, \quad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Per il teorema degli zeri esiste allora $x \in [0, +\infty[$ (e quindi in $\mathbb{R}$) tale che $f_n(x) - y = 0$, come volevasi dimostrare.

2. per n dispari occorre dimostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^n = y$. Fissato un tale y indichiamo con $f_n(x) := x^n - y$. f_n è una funzione continua sul suo dominio. Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

Per il teorema degli zeri esiste allora $x \in \mathbb{R}$ tale che $f_n(x) - y = 0$, come volevasi dimostrare.

Esercizio 19.32 *Dimostrare che l'equazione* $3^{-x} = x^3 + 2x$ *ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/8$ *senza fare uso del calcolatore.*

Osserviamo anzitutto che, posto $f(x) = 3^{-x} - x^3 - 2x$, l'equazione è equivalente a $f(x) = 0$. Poichè f è strettamente decrescente (in quanto somma di funzioni decrescenti) essa è iniettiva e quindi può avere al più uno zero.

Inoltre f è continua su $\mathbb{R}$ e $f(0) = 1$ mentre $f(1) = -8/3 < 0$, quindi per il teorema degli zeri esiste uno zero di f, x_0, appartenente all'intervallo $]0,1[$. Poichè

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8} - 1 < 0,$$

in quanto $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$, allora $x_0 \in]0, 1/2[$. Poiché

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{64} - \frac{1}{2} = \frac{64 - 33\sqrt[4]{3}}{64\sqrt[4]{3}} > 0$$

allora $x_0 \in]1/4, 1/2[$ e pertanto $3/8$ è un valore approssimato di x_0 con un errore inferiore ad $1/8$.

Il fatto che $64 - 33\sqrt[4]{3} > 0$ si può vedere facilmente scrivendosi la disequazione nella forma equivalente

$$\frac{64}{33} > \sqrt[4]{3}$$

e osservando per esempio che $\dfrac{64}{33} > \dfrac{3}{2}$ e poi che $\dfrac{3}{2} > \sqrt[4]{3}$ in quanto $(\dfrac{3}{2})^4 > 3$.

Esercizio 19.33 *Provare che l'equazione* $x(1 - 2^{-x}) = 1 - \sqrt{x}$ *ammette un'unica soluzione reale e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/8$, *senza fare uso del calcolatore.*

Osserviamo che, posto $f(x) = x(1-2^{-x})+\sqrt{x}-1$ l'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$. Osserviamo inoltre che f è una funzione strettamente crescente e continua in $[0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e crescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 1/2$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]0, 1[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f, è anche unico. Per calcolarne un valore approssimato applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi $f(1/2) = (1 - \sqrt{2})/(2\sqrt{2}) < 0$ allora $x_0 \in]1/2, 1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/4$ e si ha poi

$$f(\frac{3}{4}) = \frac{2\sqrt{3}2^{3/4} - 2^{3/4} - 3}{4 \cdot 2^{3/4}} > 0$$

Infatti, poiché il denominatore è positivo la disuguaglianza equivale a

$$2\sqrt{3}2^{3/4} - 2^{3/4} - 3 > 0 \iff 2^{3/4}(2\sqrt{3} - 1) > 3 \iff 2^3(2\sqrt{3} - 1)^4 > 3^4$$

che è vero, in quanto essendo $\sqrt{3} > 3/2$ allora

$$2^3(2\sqrt{3} - 1)^4 > 2^3(3 - 1)^4 = 2^7 = 128 > 3^4 = 81.$$

Ne consegue che $x_0 \in]1/2, 3/4[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 5/8$.

Esercizio 19.34 *Per ogni $\varepsilon > 0$ si consideri la funzione $f_\varepsilon :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da*

$$f_\varepsilon(t) = e^{\frac{1}{\varepsilon t}} - \varepsilon t^2.$$

a. Provare che l'equazione $f_\varepsilon(t) = 0$ ammette un'unica soluzione reale positiva $t(\varepsilon)$.

b. Per $\varepsilon = 1$, determinare un valore approssimato della soluzione $t(1)$ con un errore inferiore ad $1/4$, senza fare uso del calcolatore;

c. Determinare per quali $\varepsilon > 0$ risulta

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq t(\varepsilon)$$

e calcolare il limite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} t(\varepsilon)$.

a. Osserviamo che f_ε è una funzione strettamente decrescente e continua in $]0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e strettamente decrescenti. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $t(\varepsilon)$ tale che $f_\varepsilon(t(\varepsilon)) = 0$ che, per l'iniettività di f_ε, è anche unico.

b. Applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi $f_1(1) = \mathrm{e} - 1 > 0$ e $f(2) = \mathrm{e}^{1/2} - 4 < 0$ (in quanto $\mathrm{e} < 16$). Ne consegue che $t(1) \in]1,2[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $3/2$ e si ha poi

$$f_1(\frac{3}{2}) = \mathrm{e}^{2/3} - \frac{9}{4} < 0.$$

Infatti

$$\mathrm{e}^2 < (\frac{9}{4})^3 \iff \mathrm{e}^2 < \frac{769}{64} \iff \mathrm{e}^2 < \frac{769}{64}$$

che è vero, in quanto

$$\mathrm{e}^2 < 9 \text{ e } 9 < \frac{769}{64} \text{ (giacché } 64 \cdot 9 = 576 < 769).$$

Ne consegue che $t(1) \in]1, 3/2[$ e pertanto un valore di $t(1)$ con l'approssimazione richiesta è $t(1) \simeq 5/4$.
c. Osservato che

$$f_\varepsilon(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 1 \geq 0 \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0,$$

che $f_\varepsilon(t(\varepsilon)) = 0$ e che f_ε è decrescente, ne consegue che

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq t(\varepsilon) \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0.$$

Per confronto si ha che $\lim_{\varepsilon \to 0} t(\varepsilon) = +\infty$.

Esercizio 19.35 *Dimostrare che l'equazione*

$$x^3 + \log_2(x+5) = 0$$

ammette un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$*, senza fare uso del calcolatore.*

Considerata la funzione $f(x) = x^3 + \log_2(x+5)$, il problema consiste nel mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f :]-5, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e strettamente crescenti. Poiché

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione.

Avendosi $f(-1) = -1 + \log_2 4 = -1 + 2 = 1 > 0$ e $f(-2) = -8 + \log_2 3 < 0$ (in quanto $\log_2 3 < 8 \iff 3 < 2^8$ che è vero). Ne consegue che $x_0 \in]-2, -1[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $-3/2$ e si ha poi

$$f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{8} + \log_2 \frac{7}{2} < -\frac{27}{8} + \log_2 \frac{8}{2} = -\frac{27}{8} + 2 = -\frac{11}{8} < 0.$$

Ne consegue che $x_0 \in]-3/2, -1[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq -5/4$.

Esercizio 19.36 *Dimostrare che l'equazione* $\log_2 x - 3\log_{1/2}(1+x) = 5$ *ammette un'unica soluzione e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a* $1/4$*, senza fare uso del calcolatore.*

Considerata la funzione $f(x) = \log_2 x - 3\log_{1/2}(1+x) - 5$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e crescenti, di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Osserviamo, per comodità di calcolo, che $\log_{1/2}(1+x) = -\log_2(1+x)$ (formula del cambiamento di base) e quindi

$$f(x) = \log_2 x + 3\log_2(1+x) - 5.$$

Avendosi $f(1) = 3 - 5 < 0$ e $f(2) = 1 + 3\log_2 3 - 5 = 3\log_2 3 - 4 > 0$ (in quanto $3\log_2 3 > 4 \iff \log_2 3 > 4/3 \iff 3 > 2^{4/3} \iff 3^3 > 2^4 \iff 27 > 16$ che è vero). Ne consegue che $x_0 \in]1, 2[$.

Si ha poi

$$f(\frac{3}{2}) = \log_2 \frac{3}{2} + 3\log_2 \frac{5}{2} - 5 = \log_2 \frac{3 \cdot 5^3}{2^4} - 5 < 0,$$

infatti $\log_2 \frac{3\cdot 5^3}{2^4} < 5 \iff \frac{3\cdot 5^3}{2^4} < 2^5 \iff 3 \cdot 5^3 < 2^9 \iff 375 > 512$ che è vero. Ne consegue che $x_0 \in]3/2, 2[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 7/4$.

Esercizio 19.37 *Dimostrare che l'equazione*

$$\sqrt{\log_2 x} = 2 - x$$

ammette un'unica soluzione e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$*, senza fare uso del calcolatore.*

Considerata la funzione $f(x) = \sqrt{\log_2 x} - 2 + x$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua in quanto somma di funzioni continue e crescenti, di cui almeno una strettamente. Poiché

$$f(1) = -1 < 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di f è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Poiché $f(2) = 1$ allora $x_0 \in]1, 2[$. Poiché

$$f(\tfrac{3}{2}) = \sqrt{\log_2 \tfrac{3}{2}} - 2 + \tfrac{3}{2} = \sqrt{\log_2 \tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} > 0 \iff$$

$$\iff \sqrt{\log_2 \tfrac{3}{2}} > \tfrac{1}{2} \iff \log_2 \tfrac{3}{2} > \tfrac{1}{4} \iff \tfrac{3}{2} > 2^{1/4} \iff$$

$$\iff \tfrac{3^4}{2^4} > 2 \iff 3^4 > 2^5 \iff 81 > 32$$

allora $x_0 \in]1, \frac{3}{2}[$. Ne consegue che un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 5/4$.

Esercizio 19.38 *Dimostrare che la funzione* $f(x) = 2x + 3\log_2(1 + x)$ *assume il valore* 3 *in uno ed un sol punto* x_0*. Determinare un valore approssimato di* x_0 *con un errore inferiore a* 2^{-3}*, senza fare uso del calcolatore.*

Considerata la funzione $g(x) = f(x) - 3$, il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un sol punto x_0 tale che $g(x_0) = 0$. A tal fine osserviamo che $g :] - 1, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente e continua. Poiché

$$\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, il punto x_0 esiste e, per l'iniettività di g è anche unico. Ne determiniamo un valore approssimato col procedimento di bisezione. Poiché

$$g(0) = -3 < 0, \quad g(1) = 2 + 3\log_2 2 - 3 = 3\log_2 2 - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$$

allora $x_0 \in]0,1[$. Poiché

$$g(\tfrac{1}{2}) = 1 + 3\log_2 \tfrac{3}{2} - 3 = 3(\log_2 3 - 1) - 2 = 3\log_2 3 - 5 < 0 \iff$$

$$\iff \log_2 3 < \tfrac{5}{3} \iff 3 < 2^{5/3} \iff 3^3 < 2^5 \iff 27 < 32$$

allora $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$. Poiché

$$g(\tfrac{3}{4}) = \tfrac{3}{2} + 3\log_2 \tfrac{7}{4} - 3 = 3\log_2 7 - 2 + \tfrac{3}{2} - 3 = 3\log_2 7 - \tfrac{15}{2} > 0 \iff$$

$$\iff \log_2 7 > \tfrac{5}{2} \iff 7 > 2^{5/2} \iff 7^2 > 2^5 \iff 49 > 32$$

allora $x_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$. Ne consegue che un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq \frac{5}{8}$.

Esercizio 19.39 *Data la funzione* $f(x) = x^3 \log(1 + x^2)$,

1. *dire se è pari o dispari;*
2. *studiarne l'andamento di monotonia;*
3. *dimostrare che l'equazione*

$$f(x) = 1$$

   ha un'unica soluzione reale e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/4$*, senza fare uso del calcolatore.*

1. f è definita su tutto $\mathbb{R}$ e inoltre $f(-x) = -f(x)$, quindi si tratta di una funzione dispari.

2. La restrizione di f all'intervallo $[0, +\infty[$ è una funzione strettamente crescente, in quanto prodotto di due funzioni strettamente crescenti e non negative (x^3 e $\log(1+x^2)$). Poiché f è dispari allora essa risulta strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

3. Con l'introduzione della funzione $g(x) = x^3 \log(1 + x^2) - 1$ il problema è ricondotto a mostrare che esiste uno ed un solo zero di g su $\mathbb{R}$ e determinarne un'opportuna appossimazione. La funzione g è continua, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, quindi per il teorema degli zeri esiste almeno un numero reale x_0 tale che $g(x_0) = 0$. Poichè g è strettamente monotona, al pari di f, allora x_0 è anche l'unico zero di g.

Poiché $g(1) = \log 2 - 1 < 0$ e $g(2) = 8\log 5 - 1 > 0$ allora $x_0 \in]1, 2[$.

Applicando il metodo di bisezione determiniamo dunque il segno di

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{27}{8} \log\left(1 + \frac{9}{4}\right) - 1.$$

Avendosi

$$\frac{27}{8} \log\left(1 + \frac{9}{4}\right) - 1 > 0 \iff \log\left(\frac{13}{4}\right) > \frac{8}{27} \iff \frac{13}{4} > \mathrm{e}^{8/27}$$

e poiché quest'ultima disuguaglianza è vera in quanto

$$\frac{13}{4} > \frac{12}{4} = 3 > \mathrm{e} > \mathrm{e}^{8/27}$$

allora $f(3/2) > 0$ e pertanto $x_0 \in]1, 3/2[$. Un valore approssimato con un errore inferiore ad $1/4$ è quindi $x_0 \simeq 5/4$.

Esercizio 19.40 *Provare che l'equazione* $5^{1/x} = \sqrt{x}$ *ammette un'unica soluzione reale e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/4$*, senza fare uso del calcolatore.*

Osserviamo che, posto $f(x) = 5^{1/x} - \sqrt{x}$ l'equazione si può riscrivere nella forma $f(x) = 0$. Osserviamo inoltre che f è una funzione strettamente decrescente e continua in $]0, +\infty[$, in quanto somma di funzioni ivi continue e decrescenti di cui almeno una strettamente. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

allora, per il teorema degli zeri, esiste un punto $x_0 \in]0, +\infty[$ tale che $f(x_0) = 0$ che, per l'iniettività di f, è anche unico. Per calcolarne un valore approssimato applichiamo il procedimento di bisezione.

Avendosi

$$f(2) = \sqrt{5} - \sqrt{2} > 0$$

mentre

$$f(3) = \sqrt[3]{5} - \sqrt{3} < 0,$$

infatti

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt{3} \iff 5^2 < 3^3 \iff 25 < 27,$$

allora $x_0 \in]2, 3[$. Il punto medio di quest'ultimo intervallo è $5/2$ e si ha poi

$$f(\frac{5}{2}) = 5^{2/5} - (5/2)^{1/2} > 0$$

Infatti,

$$\begin{aligned} 5^{2/5} > \tfrac{5^{1/2}}{2^{1/2}} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{1/2}5^{2/5} > 5^{1/2} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 \cdot 5^{4/5} > 5 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2^5 \cdot 5^4 > 5^5 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^5 > 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 32 > 5 \end{aligned}$$

che è vero. Ne consegue che $x_0 \in]5/2, 3[$ e pertanto un valore di x_0 con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq 11/4$.

Esercizio 19.41 *Provare che la funzione* $f(x) = x^2 + \log(x-3)$ *ammette un'unico zero reale e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/4$*, senza fare uso del calcolatore.*

Esercizio 19.42 *Stabilire quante soluzioni reali ammette l'equazione* $\mathrm{e}^{-2x} = x(x^2+4)$ *e determinarne un valore approssimato con un errore inferiore ad* $1/16$*, senza fare uso del calcolatore.*

Esercizio 19.43 *Costruire una funzione continua sull'intervallo* $[0,1]$ *che assuma infinite volte il valore zero senza essere costante in alcun intervallo* $[a,b]$ *contenuto in* $[0,1]$*.*

Esercizio 19.44 *Dare un esempio di funzione* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *che abbia limite in ogni punto di* $[0,1]$ *e che sia discontinua in infiniti punti di* $[0,1]$ *(e che non sia quella dell'esercizio precedente).*

Esercizio 19.45 *Siano* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue tali che* $f(x) = g(x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{Q}$*. Dimostrare che allora si ha* $f = g$*.*

Capitolo 20

Limiti di funzioni e di successioni

Esercizio 20.1 *Calcolare, se esistono, i limiti seguenti*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n}$; *2.* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n$, $\alpha \geq -1$.

1. è un caso particolare di *2.* ($\alpha = 1/2$), quindi risolviamo solo *2.*

I casi $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$ sono banali, perchè nei primi due la successione è costante, mentre nel terzo si ha $a_n = (-1)^n$ che non ha limite.

- Caso $\alpha > 1$. Si ha $\alpha = 1 + \beta$ con $\beta > 0$, quindi (cfr. esercizio 7.1)

$$a_n = (1+\beta)^n \geq 1 + n\beta \to +\infty.$$

  Per confronto il limite è $+\infty$.

- Caso $0 < \alpha < 1$. Allora $\gamma = \frac{1}{\alpha} > 1$, quindi per quanto appena visto $\gamma^n \to +\infty$ e perciò

$$\alpha^n = \frac{1}{\gamma^n} \to 0.$$

- Caso $-1 < \alpha < 0$. Ci si riconduce al caso precedente osservando che

$$a_n = \alpha^n = (-|\alpha|)^n = (-1)^n |\alpha|^n$$

  e che $0 < |\alpha| < 1$, e pertanto il limite è 0.

Esercizio 20.2 *Dimostrare che* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Osserviamo che

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > 1,$$

infatti $n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\log n}{n}} > 1$ in quanto $\frac{\log n}{n} > 0$.

Posto $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ (> 0), si ha

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n,$$

ed elevando alla n e poi utilizzando la formula del binomio si ha

$$\begin{aligned} n &= (1+a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a_n + \binom{n}{2} a_n^2 + \text{ termini positivi } \geq \\ &\geq 1 + n a_n + \frac{n!}{(n-2)!2!} a_n^2 = 1 + n a_n + \frac{(n-1)n}{2} a_n^2 \geq \\ &\geq \frac{(n-1)n}{2} a_n^2 \end{aligned}$$

da cui $a_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$. Essendo $a_n > 0$ si ha allora

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$$

e per il teorema del confronto $a_n \to 0$, quindi $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \to 1$.

Esercizio 20.3 *Calcolare* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

Si ha

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} \leq 3\sqrt[n]{2} \to 3$$

pertanto il limite è 3.

Esercizio 20.4 *Dimostrare che se* $0 \leq a \leq b < +\infty$ *allora*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

Esercizio 20.5 *Dimostrare che la successione* $(-1)^n \sqrt[n]{n}$ *non ha limite.*

Il numero e

Consideriamo la successione

$$a_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Il limite per $n \to \infty$ si presenta nella forma 1^∞, a cui non sappiamo attribuire un valore perché non rientra nei casi del teorema 13.22. Scrivendo la successione nella forma

$$a_n = c^{n \log_c (1+1/n)}, \quad c > 0,\, c \neq 1$$

ci si rende conto che si tratta di una forma indeterminata perché all'esponente c'è una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$.

Proviamo che

$$2 \leq a_n \leq 3 \ \ \forall n \geq 1;$$

per provare la prima disuguaglianza basta scrivere i primi due termini della formula del binomio di Newton e osservare che i rimanenti sono tutti non negativi, cioè

$$\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \geq 1 + \frac{n}{n} = 2.$$

Per provare l'altra conviene dimostrare preliminarmente, per induzione (cfr. esercizio 7.7), che

$$n! \geq 2^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \tag{20.1}$$

e ricordare che (cfr. esercizio 7.2) per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a \neq 1$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \tag{20.2}$$

(in questa formula si pone per *convenzione* $0^0 = 0$). Si ha dunque (cfr. esercizio 7.8)

$$\begin{aligned}
\big(1+\frac{1}{n}\big)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}{n^k} \\
&\le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \le \ \text{(per la 20.1)} \\
&\le 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} = \ \text{(per la 20.2)} \\
&= 1 + 2\big(1 - \frac{1}{2^n}\big) \le 3.
\end{aligned}$$

Calcolando i primi termini della successione si vede che

$$a_1 < a_2 < a_3 < ...$$

Mostriamo che effettivamente (a_n) è strettamente crescente, cioè che

$$\big(1+\frac{1}{n}\big)^n \le \big(1+\frac{1}{n+1}\big)^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Dalla formula del binomio di Newton, procedendo come sopra, si ha

$$\begin{aligned}
\big(1+\frac{1}{n}\big)^n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\big(1-\frac{1}{n}\big)\big(1-\frac{2}{n}\big)\cdots\big(1-\frac{k-1}{n}\big) \\
&\le 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)\big(1-\frac{2}{n+1}\big)\cdots\big(1-\frac{k-1}{n+1}\big) \\
&\le 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\big(1-\frac{1}{n+1}\big)\big(1-\frac{2}{n+1}\big)\cdots\big(1-\frac{k-1}{n+1}\big) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1)^{-k} = \big(1+\frac{1}{n+1}\big)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$. Questo limite, compreso tra 2 e 3, si indica con e (ed è chiamato numero di Neper); più precisamente si trova

$$\mathrm{e} = 2.71828182845...$$

Si potrebbe dimostrare che e è un numero irrazionale, ma rimandiamo la dimostrazione di questo fatto al corso di Analisi 2 quando disporremo di strumenti più potenti.

Il criterio della radice

Teorema 20.6 (criterio della radice per le successioni) *Sia* (a_n) *una successione di numeri reali. Si ha che*

$$\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0.$$

DIMOSTRAZIONE Sia $\operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$. Per le proprietà caratteristiche del massimo limite si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt[n]{|a_n|} < L + \varepsilon \ \ \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Sia ora $\varepsilon_0 > 0$ tale che $L + \varepsilon_0 < 1$. Elevando alla n si ha

$$0 \leq |a_n| < (L + \varepsilon_0)^n \quad \forall n > \nu_{\varepsilon_0}.$$

Per il teorema del confronto, avendosi

$$(L + \varepsilon_0)^n \to 0$$

si ha anche $|a_n| \to 0$ e quindi la tesi. □

Esercizio 20.7 *Calcolare* $\lim_{n\to\infty} n^p b^n$*, con* $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *ed* $0 < b < 1$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Essendo $b > 0$ possiamo passare alla radice n-esima ottenendo

$$\sqrt[n]{n^p b^n} = b \sqrt[n]{n^p} \to b.$$

Per il criterio della radice, essendo $b < 1$ si ha che il limite è 0.

Esercizio 20.8 *Mostrare che dall'esercizio precedente segue che*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \qquad \forall \ p \in \mathbb{N}, \ a > 1.$$

Il criterio può essere applicato per confrontare il comportamento al limite delle successioni

$$n^p, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n$$

con (per fissare le idee) $p > 0$ e $a > 1$. Si ha infatti, per esempio,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Esercizio 20.9 *Provare che* $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

Suggerimento: procedere per confronto con la successione $1/n$.

Alcuni limiti notevoli

Esercizio 20.10 *Dimostrare che*

1. $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1; \end{cases}$

2. $\lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$

Esercizio 20.11 *Dimostrare che, come succedeva per le successioni, si ha*

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ *per ogni* $p \in \mathbb{N}$ *e* $a > 1$*;*

2. $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$

1. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$[x] \leq x \leq [x] + 1$$

allora, per la monotonia della potenza e dell'esponenziale, si ottiene

$$\frac{[x]^p}{a^{[x]+1}} \leq \frac{x^p}{a^x} \leq \frac{([x]+1)^p}{a^{[x]}}.$$

D'altra parte si sa che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{a^n} = 0$$

e col cambiamento di variabile $n = [x]$ si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]^p}{a^{[x]+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{([x]+1)^p}{a^{[x]}} = 0.$$

L'altro limite si calcola analogamente. Dal teorema del confronto segue infine la tesi.

2. Per il calcolo del limite *2.* utilizziamo un procedimento analogo al precedente. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$[x] \le x \le [x] + 1$$

da cui, per ogni $x > 1$

$$\frac{1}{[x]+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]}$$

e quindi, per la monotonia dell'esponenziale, si ottiene

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

per ogni $x > 1$.

D'altra parte si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$$

e col cambiamento di variabile $n = [x]$ si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \mathrm{e}.$$

L'altro limite si calcola analogamente. Dal teorema del confronto segue infine la tesi.

Eseguendo opportuni cambiamenti di variabile, si possono calcolare i limiti (fondamentali) dell'esercizio seguente.

Esercizio 20.12 *Provare che*

1. $\lim_{x\to+\infty} x^p b^x = 0$ *per ogni* $p \in \mathbb{N}$ *e* $0 < b < 1$*;*

2. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^p x}{x^\varepsilon} = 0 \textit{ per ogni } p \in \mathbb{N} \textit{ e ogni } \varepsilon > 0;}$

3. $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^n \log^p x = 0 \text{ per ogni } p, n \in \mathbb{N},\ n \neq 0;}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e};$

5. $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1;}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \mathrm{e}$ *per ogni* $a > 0,\ a \neq 1;$

7. $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1;}$

8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \log a$ *per ogni* $a > 0,\ a \neq 1.$

1. Basta porre $b = 1/a$ e ricondursi al limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{a^x}$.
2. Ricorrendo al cambiamento di variabile $x = \mathrm{e}^y$, la funzione di cui si deve calcolare il limite risulta

$$\frac{\log^p x}{x} = \frac{\log^p \mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y} = \frac{y^p}{\mathrm{e}^y}.$$

Per stabilire a cosa deve tendere y si deve invertire la funzione $x = \mathrm{e}^y$ ottenendo $y = \log x$ e osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty.$$

Si ha dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^p x}{x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^p}{\mathrm{e}^y} = 0.$$

3. Eseguire il cambiamento di variabile $x = 1/y$.
4. Col cambiamento di variabile $x = -y$ il limite diventa

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} &= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{y-1}{y}\right)^y}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y\end{aligned}$$

e, con l'ulteriore cambiamento di variabile $y - 1 = z$ si ha

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\left(1+\frac{1}{z}\right) = \mathrm{e}.$$

5. Col cambiamento di variabile $x = 1/y$ la funzione di cui si deve calcolare il limite diventa

$$\frac{\log(1+x)}{x} = y\log(1+\frac{1}{y}),$$

e poiché $y = 1/x$ e $\lim_{x\to0^+} y = \lim_{x\to0^+} 1/x = +\infty$ allora si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to+\infty} y\log(1+\frac{1}{y}) = \lim_{y\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = 1.$$

Analogamente si procede per il limite da sinistra.
6. Passare, con la formula del cambiamento di base, dal logaritmo in base a a quello in base e, e utilizzare il risultato precedente.
7. Eseguire il cambiamento di variabile $x = \log(1+y)$.
8. Eseguire il cambiamento di variabile $x = \log_a(1+y)$.

Esercizi

Esercizio 20.13 † *Calcolare, se esistono, i seguenti limiti*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(2+\mathrm{e}^{-x^2})}{x+2}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log^{100} x}{\sqrt[10]{x}-100}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to-1/3^+}[\log_2(3x+1)-\log_4(3x+1)]$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to-1/3^+}[\log_2(3x+1)-\log_4(3x+1)]\,\mathrm{sen}(6x+2)$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{(x^2-3)\,\mathrm{sen}(x-2)}$.

Esercizio 20.14 ‡ *Calcolare i limiti*

---
† *1.* 0; *2.* 0; *3.* $-\infty$; *4.* 0; *5.* 7.
‡ *1.* $+\infty$ se $a < 1$, $1/4$ se $a = 1$, 0 se $a > 1$; *2.* $1/a^4$ se $a \neq 0$, $+\infty$ se $a = 0$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}+\log(1+x^2)}{5x-x^a}$; *2.* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(1+a\sqrt{x})^4}$.

nel caso $a = 1$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 20.15 †† *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos(ax)}}{\operatorname{sen} x + x\mathrm{e}^{-x}}$$

nei casi $a = 0$, $a = 1$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 20.16 † *Calcolare, se esistono, i limiti*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{ax + x^2 \operatorname{sen}(1/x)}{\log(1+x)}$; *2.* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}$.

nel caso $a = 0$ e per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 20.17 *Calcolare, se esistono, i limiti seguenti.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ *dove* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\log x}{1+x} & \textit{se } x > 0, \\ (1+x)^{\frac{\log|x|}{x}} & \textit{se } x < 0; \end{cases}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)$ *dove f è la funzione definita al punto precedente;*

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1)\frac{\tan x - \sin x}{x^\alpha}$ *al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$;*

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\big)$;

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\arcsin x} - \mathrm{e}^{\arctan x}}{\arcsin x - \arctan x}$.

1. La funzione è definita su $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. Il limite per $x \to 0^+$ si presenta in forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log\Big(\frac{1}{t}\Big) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{\log t}{t} = 0.$$

††0 se $a = 0$, $\frac{|a|}{2\sqrt{2}}$ se $a \neq 0$.

† *1.* a per ogni $a \in \mathbb{R}$; *2.* $-\infty$ se $a > -1/2$, -2 se $a = -1/2$, 0 se $a < -1/2$.

Il limite per $x \to 0^-$ si presenta in forma indeterminata 1^∞. Col cambiamento di variabile $y = 1/x$ si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1+x)^{\frac{\log(-x)}{x}} = \lim_{y\to -\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y\log\frac{1}{y}} = 0.$$

Pertanto il limite esiste e vale 0.
2. Il limite per $x \to -1^+$ si presenta in forma indeterminata 0^0. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} (1+x)^{\frac{\log(-x)}{x}} = \lim_{x\to -1^+} \mathrm{e}^{\frac{\log(-x)}{x}\log(1+x)} \\ &= \lim_{y\to 0^+} \frac{\log(1-y)}{y-1}\log y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\log(1-y)}{-y}\frac{-y}{y-1}\log(y) = 0.\end{aligned}$$

3. $f : \mathbb{R} \setminus \big(\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}\big) \to \mathbb{R}$. Il limite per $x \to 0^+$ si presenta in forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Poiché

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^x - 1)\frac{\tan x - \sin x}{x^\alpha} &= \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\frac{\tan x - \sin x}{x^{\alpha-1}} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\big(\frac{1}{\cos x} - 1\big)x^{\alpha-2} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-4}}\end{aligned}$$

allora

$$\lim_{x\to 0^+} (\mathrm{e}^x - 1)\frac{\tan x - \sin x}{x^\alpha} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\alpha-4}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 4 \\ 1/2 & \text{se } \alpha = 4 \\ 0 & \text{se } \alpha < 4 \end{cases}$$

4. $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$. Il limite per $x \to +\infty$ si presenta in forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\big(5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}\big) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{5^y - 2^y}{y} = \\ &= \lim_{y\to 0^+}\frac{5^y - 1 + 1 - 2^y}{y} = \log 5 - \log 2 = \log\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

5. $f : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Il limite per $x \to 0$ si presenta in forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Osservato che

$$\frac{\mathrm{e}^{\arcsin x} - \mathrm{e}^{\arctan x}}{\arcsin x - \arctan x} = \mathrm{e}^{\arctan x}\frac{\big(\mathrm{e}^{\arcsin x - \arctan x} - 1\big)}{\arcsin x - \arctan x},$$

e che
$$\lim_{x\to 0} e^{\arctan x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \big(\arcsin x - \arctan x\big) = 0$$
e che $\arcsin x - \arctan x \neq 0$ in un intorno di $x_0 = 0$, escluso 0, allora eseguendo il cambiamento di variabile
$$y = \arcsin x - \arctan x$$
il limite diviene
$$\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Esercizio 20.18 *Calcolare, se esiste, il limite*
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$$

Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Osservato che
$$\frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)} = \frac{\log(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}$$
e che
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{2x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\operatorname{sen} x} = 2, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)} = 1$$
allora
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)} = 2.$$

Esercizio 20.19 *Calcolare, se esiste, il* $\lim_{x\to 0^+} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^{\operatorname{sen} x}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0. Osservato che
$$\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{\operatorname{sen} x} = e^{\operatorname{sen} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
e che
$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} x \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = 0$$
in quanto
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to+\infty}\frac{\log(1+y)}{y} = 0,$$

allora, per la continuità della funzione esponenziale, si ha che

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Esercizio 20.20 *Provare che, se (b_n) è una successione convergente a zero e tale che $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{1/b_n} = \mathrm{e}.$$

Utilizzare questo risultato per dimostrare che: per ogni successione (a_n) tale che $|a_n| \to +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Si può partire dal fatto che

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}.$$

Per il teorema sui limiti delle funzioni mediante le successioni, ciò è equivalente a

$$\lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{1/b_n} = \mathrm{e} \quad \forall\, b_n \to 0 \ : \ b_n \neq 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ed è così provata la prima parte dell'enunciato. Per dimostrare la seconda affermazione basta considerare la successione $b_n = 1/a_n$ e osservare che

$$\lim_{n\to\infty}|b_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|} = 0$$

e che pertanto anche $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Per quanto provato in precedenza si ha allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{n\to\infty}(1+b_n)^{1/b_n} = \mathrm{e}.$$

Esercizio 20.21 *Calcolare*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n-2}{n^2+n+1}\right)^n.$$

Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo 1^∞. Determiniamo a_n tale che
$$\frac{n^2-n-2}{n^2+n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$
e sfruttiamo il fatto che se $|a_n| \to +\infty$ allora si ha
$$\lim_{n\to\infty} \big(1+\frac{1}{a_n}\big)^{a_n} = \mathrm{e}.$$
Si ha
$$a_n = \frac{n^2+n+1}{-2n-3} \to -\infty.$$
Allora
$$\big(\frac{n^2-n-2}{n^2+n+1}\big)^n = \Big(\big(1+\frac{1}{\frac{n^2+n+1}{-2n-3}}\big)^{\frac{n^2+n+1}{-2n-3}}\Big)^{\frac{-2n-3}{n^2+n+1}\cdot n} \to \mathrm{e}^{-2}$$

Esercizio 20.22 *Calcolare*[†] $\lim_{n\to\infty} \log_{\sqrt[n]{n}+1} \dfrac{n}{n+2}$.

Esercizio 20.23 *Calcolare, qualora esista, il limite*
$$\lim_{n\to\infty} (1+\mathrm{e}^n)^{\frac{(-1)^n}{n}}.$$

Il limite si presenta in forma indeterminata del tipo ∞^0. Cominciamo con l'osservare che
$$a_n := (1+\mathrm{e}^n)^{\frac{(-1)^n}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{(-1)^n}{n}\log(1+\mathrm{e}^n)}.$$
Poiché
$$1 = \frac{\log(\mathrm{e}^n)}{n} \le \frac{\log(1+\mathrm{e}^n)}{n} \le \frac{\log(2\mathrm{e}^n)}{n} \le \frac{n+\log 2}{n} \to 1$$
allora, per il criterio del confronto,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\mathrm{e}^n)}{n} = 1,$$
e quindi $a_{2n} \to \mathrm{e}$, mentre $a_{2n+1} \to 1/\mathrm{e}$, quindi il limite non esiste.

Esercizio 20.24 *Calcolare, se esistono, i limiti per $x \to 2$ e per $x \to +\infty$ della funzione*
$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(4-x^2)}{\log(x^2-3)}.$$

[†] 0

La successione delle medie. Teoremi di Cesaro

Data una successione (a_n), consideriamo la successione delle sue medie aritmetiche

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Teorema 20.25 (Cesaro) *Se una successione (a_n) ha limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$, anche la successione delle sue medie aritmetiche ha il medesimo limite.*

Dimostrazione Poniamo

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Supponiamo dapprima che $L \in \mathbb{R}$ (rimarranno i casi $L = \pm\infty$). Per definizione di limite si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : \ L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

Ora, da una parte

$$\begin{aligned}\alpha_n \ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=\nu_\varepsilon+1}^{n} a_i < \\ &< \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=\nu_\varepsilon+1}^{n} (L+\varepsilon) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} a_i + \frac{1}{n}(L+\varepsilon)(n-\nu_\varepsilon)\end{aligned}$$

e, analogamente

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} a_i + \frac{1}{n}(L-\varepsilon)(n-\nu_\varepsilon) < \alpha_n < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\nu_\varepsilon} a_i + \frac{1}{n}(L+\varepsilon)(n-\nu_\varepsilon). \tag{20.3}$$

Siccome per ogni $\varepsilon > 0$ le due successioni a destra e sinistra di α_n in (20.3) tendono, per $n \to \infty$, ad $L - \varepsilon$ e ad $L + \varepsilon$ rispettivamente, allora si ha

$$L - \varepsilon \le \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} \alpha_n \le \operatorname*{maxlim}_{n\to\infty} \alpha_n \le L + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0,$$

e pertanto (α_n) converge a L. **Esercizio**: dimostrare il teorema nel caso $L = -\infty$ e $L = +\infty$. □

Esercizio 20.26 *Calcolare il limite* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log(n!)$.

Si ha

$$\begin{aligned}\log(n!) &= \log(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= \log 1 + \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n\\ &= \sum_{i=1}^{n} \log i.\end{aligned}$$

Dunque

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\log(n!) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log i$$

è la successione delle medie di

$$a_n = \log n.$$

Poichè $a_n \to +\infty$ allora anche $\alpha_n \to +\infty$.

Esercizio 20.27 *Sia* (a_n) *una successione di numeri reali. Dimostrare i seguenti altri 3 teoremi di Cesaro.*

(i) $a_n - a_{n-1} \to L \quad\Rightarrow\quad \frac{a_n}{n} \to L$*;*

*(ii) (*medie geometriche*) se* $a_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *allora si ha che*

$$a_n \to L \quad\Rightarrow\quad \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n} \to L;$$

*(iii) (*rapporto $\Rightarrow$ radice*) se* $a_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *allora si ha che*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L \quad\Rightarrow\quad \sqrt[n]{a_n} \to L.$$

Per provare (i) basta prendere $b_n = a_n - a_{n-1}$ (con $a_0 = 0$) e applicare il teorema 20.25. Si ha

$$b_n \to L \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{n}(b_1 + \cdots + b_n) = \frac{1}{n}a_n \to L.$$

Per provare (ii) basta prendere $b_n = \log a_n \to \log L$. Allora per il teorema 20.25 si ha

$$\begin{aligned}\beta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log a_i =\\ = \frac{1}{n}\log\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i\Big) = \log\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \to \log L\end{aligned}$$

da cui, passando all'esponenziale, segue la tesi (intendendo, per convenzione, $\log 0 = -\infty$).
Per provare (*iii*), detta $b_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ (con $a_0 = 1$), allora, per la parte già provata (*iii*) si ha

$$\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1} b_n} \to L$$

e la tesi segue allora dal fatto che

$$\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1} b_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{a_n}.$$

Esercizio 20.28 (Medie armoniche). *Definendo la media armonica di n numeri non nulli a_1,...,a_n come*

$$\mathrm{h}(a_1, \ldots, a_n) := \frac{1}{\frac{1/a_1 + \cdots + 1/a_n}{n}}$$

provare che $a_n \neq 0$, $a_n \to L$ implica $\mathrm{h}(a_1, ..., a_n) \to L$.

Osservazione 20.29 La (*ii*) dell'esercizio 20.27 si può provare più facilmente ricorrendo alla disuguaglianza tra le medie

$$h(a_1, \ldots, a_n) \leq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

che vale per ogni n-upla di numeri positivi e che generalizza quelle dimostrate nel Capitolo 8. La dimostrazione di quest'ultima tuttavia richiede un utilizzo non banale del principio di induzione (vedere ad esempio "Bechenbach e Bellman: Introduzione alle Disuguaglianze, Zanichelli).

Esercizio 20.30 *Calcolare il limite* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

Esercizi

Esercizio 20.31 *Mostrare che è ben definita e studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \geq 0 \\ a_{n+1} = \sqrt[n]{1 + a_n} - 1. \end{cases}$$

È immediato dimostrare per induzione che $1 + a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, pertanto la successione è ben definita. Scriviamo alcuni valori della successione.

$$a_1 = \alpha,\ a_2 = \alpha,\ a_3 = \sqrt{1+\alpha} - 1,\ a_4 = \sqrt[6]{1+\alpha} - 1,\ a_5 = \sqrt[24]{1+\alpha} - 1$$

e ci viene il sospetto che sia

$$a_n = \sqrt[(n-1)!]{1+\alpha} - 1 = (1+\alpha)^{\frac{1}{(n-1)!}} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lo dimostriamo per induzione.
Per $n = 1$, $a_1 = \alpha$ è vera.
Per ipotesi di induzione supponiamo ora che

$$a_n = (1+\alpha)^{\frac{1}{(n-1)!}} - 1;$$

allora

$$a_{n+1} = (1 + a_n)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{(n-1)!}}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 = (1+\alpha)^{\frac{1}{n!}} - 1.$$

Si ha dunque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (1+\alpha)^{\frac{1}{n!}} - 1 = 0.$$

Esercizio 20.32 *Data la successione (a_n) definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-n})a_n^2, \end{cases}$$

1. *determinare un maggiorante di (a_n);*
2. *studiarne l'andamento di monotonia;*
3. *studiarne il comportamento al limite per $n \to \infty$.*

Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2} < a_1, \quad a_3 = (1 - \frac{1}{\mathrm{e}^3})(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^2})^2 < a_2.$$

Congetturiamo quindi che la successione sia decrescente e che 1 sia un maggiorante. Lo dimostriamo per induzione.
1. Per dimostrare che 1 è un maggiorante osserviamo che $a_1 \leq 1$ e supponiamo per ipotesi induzione che $a_n \leq 1$. Allora si ha $a_{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-n})a_n^2 < a_n^2 \leq a_n$ e quindi, per induzione, $a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Proviamo ora che la successione è decrescente. Per ciò basta osservare che dal momento che $a_n \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $a_{n+1} = (1-\mathrm{e}^{-n})a_n^2 < a_n^2 \leq a_n$ che significa appunto che la successione è decrescente.
3. Essendo monotona la successione ammette limite λ e, dal momento che è anche non negativa, questo limite è finito, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$. Passando al limite per $n \to \infty$ nell'equazione $a_{n+1} = (1 - \mathrm{e}^{-n})a_n^2$ si ottiene che λ deve soddisfare l'equazione $\lambda = \lambda^2$, soddisfatta da $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. Poichè $\lambda = 1$ non può essere il limite (in quanto $a_n \leq a_2 < 1$ per ogni $n \geq 2$) ne consegue che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Esercizio 20.33 *Studiare il comportamento al limite per $n \to \infty$ della successione (a_n) definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1. \end{cases}$$

Scriviamo alcuni termini della successione per farci venire qualche idea sull'andamento.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{5}{4}.$$

Congetturiamo che la successione sia crescente e lo dimostriamo per induzione. Si ha $a_1 < a_2$. Per ipotesi di induzione supponiamo che $a_n < a_{n+1}$ e proviamo che $a_{n+1} < a_{n+2}$. Infatti, per l'ipotesi di induzione e poiché l'arcotangente è una funzione crescente si ha

$$a_{n+1} = \frac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1 < \frac{1}{\pi} a_{n+1} \operatorname{arctg} n + 1 < \frac{1}{\pi} a_{n+1} \operatorname{arctg}(n+1) + 1 = a_{n+2}.$$

Per il teorema sul limite delle successioni monotone esiste dunque il limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \in]5/4, +\infty[.$$

Passando al limite nella uguaglianza $a_{n+1} = \frac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1$ si ottiene, per l'unicità del limite che, se L è finito, allora deve soddisfare l'equazione

$$L = \frac{L}{2} + 1 \iff L = 2.$$

Ne consegue che $L = +\infty$ oppure $L = 2$. Poichè la successione è crescente, se il limite è 2 allora 2 deve essere un maggiorante. Cerchiamo di dimostrarlo per induzione.

$a_1 \leq 2$ è vero. Supponiamo per ipotesi di induzione che $a_n \leq 2$ e dimostriamo che allora $a_{n+1} \leq 2$. Infatti, si ha

$$a_{n+1} = \frac{1}{\pi} a_n \operatorname{arctg} n + 1 \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} n + 1 \leq \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} + 1 = 2$$

dove nella prima disuguaglianza è stata usata l'ipotesi di induzione e nella seconda il fatto che $\operatorname{arctg} n \leq \pi/2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ne consegue che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2.$$

Esercizio 20.34 *Studiare il comportamento al limite per* $n \to \infty$ *della successione* (a_n) *definita per induzione da*

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^{-n} a_n^2, \end{cases}$$

nei casi $\alpha = 2$ *e* $\alpha = \mathrm{e}$.

Capitolo 21

Il teorema di Weierstrass

Teorema 21.1 (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente.*

DIMOSTRAZIONE Sia (x_n) una successione limitata. Allora esiste un intervallo $I = [a, b]$ tale che $x_n \in [a, b]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Utilizziamo ora un procedimento di bisezione di I per selezionare una sottosuccessione convergente di (x_n). Consideriamo il punto

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Allora uno dei due intervalli $[a, c]$ o $[c, b]$ deve contenere x_n per un numero infinito di indici n. Può naturalmente succedere che tutti e due gli intervalli siano di questo tipo, ma non può accadere, siccome i numeri naturali sono infiniti, che entrambi contengano solo un numero finito di termini della successione; si osservi inoltre che questo vale anche se la successione dovesse essere costante da un certo indice in poi. Scegliamo questo intervallo (o uno dei due se entrambi contengono un numero infinito di termini della successione) e lo chiamiamo $[a_1, b_1]$. Si ha

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Sia x_{n_1} qualunque elemento della successione (x_n) che appartiene a $[a_1, b_1]$. Sia ora

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e, ripetendo il ragionamento, consideriamo quello tra i due intervalli $[a_1, c_1]$ e $[c_1, b_1]$ che contenga x_n $(n > n_1)$ per un numero infinito di n e lo chiamiamo

$[a_2, b_2]$. Sia x_{n_2} un qualunque elemento della successione (x_n) $(n > n_1)$ che appartiene a $[a_2, b_2]$. Continuando in questa maniera costruiamo tre successioni a_k, b_k e x_{n_k} tali che

1. a_k è crescente e b_k è decrescente;
2. $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$;
3. $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di (x_n);
4. $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Poiché (a_k) è monotona e limitata (superiormente da b e inferiormente da a) allora esiste il $\lim_{k\to+\infty} a_k = \bar{x}$ e per la *2.* anche $\lim_{k\to+\infty} b_k = \bar{x}$ cosicché per la *4.* e il teorema del confronto si ha $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. □

Corollario 21.2 *Ogni successione di numeri reali possiede una sottosuccessione che ammette limite.*

Dimostrazione Se la successione (x_n) è limitata, allora per il teorema precedente ammette una sottosuccessione convergente.

Se, invece, la successione (x_n) non è limitata, allora non lo è inferiormente oppure superiormente. Supponiamo che (x_n) non sia limitata superiormente (il caso in cui (x_n) non è limitata inferiormente si tratta in modo analogo). Dimostriamo allora che (x_n) possiede una sottosuccessione divergente a $+\infty$. Infatti, poiché la successione non è limitata superiormente, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste n_k tale che $x_{n_k} > k$.

Osserviamo che (x_{n_k}) non è necessariamente una sottosuccessione di (x_n) perché l'applicazione $k \to n_k$ non è detto che sia strettamente crescente. Per ottenere una sottosuccessione basta modificare leggermente il procedimento precedente. Infatti, dato $k = 1$ esiste x_{n_1} tale che $f(x_{n_1}) > 1$. Procedendo per induzione, una volta definito x_{n_k}, sia $n_{k+1} > n_k$ tale che $f(x_{n_{k+1}}) > k+1$. In questo modo si definisce una sottosuccessione di (x_n) tale che $f(x_{n_k}) > k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per il teorema del confronto

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = +\infty.$$

Teorema 21.3 (di Weierstrass) *Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono*

$$\min_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad \max_{[a,b]} f.$$

Dimostrazione Dimostriamo l'esistenza del minimo. Per il massimo si procede analogamente (scrivere la dimostrazione in questo caso per esercizio). Prima di tutto dimostriamo che posto

$$m = \inf_{[a,b]} f$$

esiste una successione $x_n \in [a,b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m.$$

Infatti, se $m = -\infty$ allora, per definizione, la funzione f non è limitata inferiormente e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) < -n$ e perciò $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty = m$. Se, invece, $m \in \mathbb{R}$ allora m è il massimo dei minoranti dell'immagine di f, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$, $m + 1/n$ che è più grande di m non può essere un minorante, cioè deve esistere $x_n \in [a,b]$ tale che

$$f(x_n) < m + \frac{1}{n}$$

e poiché d'altra parte

$$m \leq f(x_n)$$

allora per il teorema del confronto si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = m$.

Applicando il teorema di Bolzano-Weierstrass alla successione limitata (x_n), si ottiene una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente ad un numero reale $\bar{x}$. Poiché l'insieme di definizione $[a,b]$ è chiuso, allora $\bar{x} \in [a,b]$.

Inoltre, poiché $(f(x_{n_k}))$ è una sottosuccessione di $(f(x_n))$ e quest'ultima converge ad m allora anche $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = m$. Per la continuità di f si ha allora che

$$m = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

e questo prova l'asserto. □

Del Teorema precedente si può dare una generalizzazione.

Definizione 21.4 *Una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice* sequenzialmente semicontinua inferiormente *se per ogni successione* (x_n) *con* $x_n \in [a,b]$ *per ogni* n

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(\bar{x})$$

Teorema 21.5 (di Weierstrass 2) *Sia f una funzione sequenzialmente semicontinua inferiormente in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora f assume minimo in $[a,b]$, cioè esiste*

$$\min_{[a,b]} f.$$

DIMOSTRAZIONE Dimostriamo l'esistenza del minimo. Come nel teorema precedente si riesce a trovare una successione (x_{n_k}) tale che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$ e $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = m$, dove m è l'estremo inferiore di f in $[a,b]$. Per la semicontinuità di f si ha

$$m = \liminf_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \geq f(\bar{x}).$$

D'altro canto, essendo $\bar{x} \in [a,b]$, si ha $f(\bar{x}) \geq m$ e quindi necessariamente $m = f(\bar{x})$, da cui l'asserto. $\square$

Appendice A

In questa appendice presentiamo una dimostrazione estesa del teorema 19.8 dei valori intermedi di p. 165

Teorema 19.8 (dei valori intermedi) *Sia I un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume tutti i valori strettamente compresi tra $\inf\limits_{x\in I} f$ e $\sup\limits_{x\in I} f$, cioè*

$$\forall c \in \left]\inf_{x\in I} f, \sup_{x\in I} f\right[\quad \exists x \in I \ : \ f(x) = c.$$

Dimostrazione La tesi equivale a dimostrare che la funzione continua $g(x) := f(x) - c$ ammette almeno uno zero in I, per ogni fissato c compreso tra l'estremo superiore ed inferiore di f. Vogliamo applicare il teorema degli zeri a g; per far ciò bisogna selezionare un intervallo chiuso e limitato su cui g è definita ed agli estremi del quale assume valori di segno opposto.

Se f è una funzione costante la tesi è banale. Sia dunque f non identicamente costante; in questo caso f ammette estremi superiore ed inferiore distinti, possibilmente $\pm\infty$. Sia $\inf_{x\in I} f < c < \sup_{x\in I} f$. Supposto $\inf_{x\in I} f \in \mathbb{R}$ e ricordando che $\inf_{x\in I} f = \inf f(I)$, dalla seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore (*2.* del teorema 6.10) e dalla disequazione $\inf_{x\in I} f < c$ segue che esiste $\alpha \in I$ tale che $f(\alpha) < c$. Se, invece, $\inf_{x\in I} f = -\infty$, per definizione l'insieme $f(I)$ non è limitato inferiormente, ovvero nessun numero reale, e in particolare nemmeno c, è minorante di $f(I)$. Quindi anche in questo caso deve esistere $\alpha \in I$ tale che $f(\alpha) < c$. Analogamente si ragiona partendo dalla disequazione $c < \sup_{x\in I} f$ e utilizzando la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore per dimostrare che esiste $\beta \in I$ tale che $f(\beta) > c$.

Sia J l'intervallo di estremi α, β (osserviamo che a priori non possiamo sapere se $\alpha < \beta$ oppure $\beta < \alpha$). Poiché $\alpha, \beta \in I$ ed I è un intervallo, si ha $J \subseteq I$, dunque la funzione g è ivi definita. Per costruzione

$$g(\alpha)g(\beta) = \big(f(\alpha) - c\big)\big(f(\beta) - c\big) < 0.$$

Dunque, per il teorema degli zeri applicato alla funzione g nell'intervallo J, esiste un punto x_0 appartenente a J, e quindi ad I, tale che $g(x_0) = 0$ e quindi, per definizione di g, si ha $f(x_0) = c$.

Indice analitico