Capitolo 3

Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni

Coercività

Definizione 3.1 *Una funzione $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* coerciva *(risp.* sequenzialmente coerciva*) se per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottoinsieme compatto e chiuso (risp.* sequenzialmente compatto*), K_t, di X tale che*

$$\{x \in X \ : \ F(x) \le t\} \subseteq K_t.$$

Osservazione 3.2 Si verifica immediatamente che se F è coerciva e $G \ge F$ allora anche G è coerciva.

Teorema 3.3 (Tonelli) *Sia $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione*

1. *semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente s.c.i);*
2. *coerciva (risp. sequenzialmente coerciva).*

Allora esiste il minimo di F su X.

Dimostrazione **Versione topologica**. Se F è la costante $+\infty$ ogni $x \in X$ è un punto di minimo. Supponiamo allora che

$$\inf\{F(x) : x \in X\} = m < +\infty.$$

Preso un qualunque $t > m$ si ha allora

$$\{x \in X \ : \ F(x) \le t\} \ne \varnothing.$$

Per la coercività di F esiste un sottoinsieme K_t chiuso e compatto (risp. sequenzialmente compatto) e non vuoto tale che $\{x \in X : F(x) \le t\} \subseteq K_t$. Ne consegue che

$$\inf_X F = \inf_{K_t} F$$

e quest'ultimo è minimo per il teorema di Weierstrass 2.26 .

Versione sequenziale. Anche in questo caso, se F è identicamente $+\infty$ non c'è nulla da provare. Altrimenti, come prima

$$\inf\{F(x) \ : \ x \in X\} < +\infty. \tag{3.1}$$

Sia (x_n) una *successione minimizzante*, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf\{F(x) \ : \ x \in X\} < +\infty;$$

è un facile esercizio mostrare che una tale successione esiste sempre, ma a priori la (x_n) potrebbe non essere convergente. La prima cosa da fare è allora cercare una successione minimizzante *convergente*. La $F(x_n)$, invece, essendo convergente o, al più, divergente a $-\infty$, è limitata superiormente, cioè esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$$F(x_n) \leq L \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Poiché F è sequenzialmente coerciva allora la successione (x_n) ammette una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente ad un elemento $\overline{x} \in Y$ (questa è appunto una successione minimizzante convergente). A questo punto, $\overline{x}$ è candidato ad essere punto di minimo di F. Dobbiamo, cioè, provare che

$$F(\overline{x}) \leq \inf\{F(x) \ : \ x \in X\}. \tag{3.2}$$

Per ottenere la minorazione, dobbiamo mettere in relazione il valore in $\overline{x}$ con quelli nelle x_{n_k}. Per la semicontinuità di F Si ha

$$F(\overline{x}) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = \inf\{F(x) \ : \ x \in X\}$$

Segue la tesi. □

I teoremi ora dimostrati sono il fondamento del cosiddetto "metodo diretto del Calcolo delle Variazioni", che può essere riassunto nello schema seguente

$$\boxed{\text{coercività + semicontinuità inferiore} \Rightarrow \text{esistenza di punti di minimo}}$$

Osserviamo che le richieste *1.* e *2.* del Teorema di Tonelli sono tra loro contrastanti, in quanto la prima richiede che la topologia sia abbastanza forte (ipotesi di forza) mentre la seconda richiede che la topologia sia abbastanza debole (ipotesi di debolezza). Il *metodo diretto del Calcolo delle Variazioni*, per la dimostrazione dell'esistenza del minimo di un funzionale F su uno spazio topologico X, consiste nel determinare, quando ciò è possibile, una topologia τ su X che soddisfi entrambe le ipotesi di semicontinuità e coercività.

Tentativo di applicazione

Vediamo quali problemi si incontrano cercando di applicare il metodo diretto, ad esempio, al caso del problema di minimo

$$\min F(u) = \int_0^1 |u(x)|^2\,dx - 2\int_0^1 g(x)u(x)\,dx$$

con $g \in L^2(0,1)$.[1]

[1] Ricordiamo che $L^2(\Omega)$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, è definito come lo spazio delle funzioni u tali che $\int_\Omega |u|^2 dx < +\infty$ modulo la relazione di equivalenza che identifica funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla secondo Lebesgue. $L^2(\Omega)$ si può dotare del prodotto scalare $u \cdot v = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$ che induce la norma $\|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{1/2}$ rispetto a cui risulta completo (teorema di Riesz-Fisher - cfr. Brezis [1], Théoréme IV.8, oppure Rudin [3], Teorema 3.11). $L^2(\Omega)$ è quindi uno spazio di Hilbert.

È naturale scegliere $X = L^2(0,1)$ come spazio su cui ambientare il problema di minimo. È subito visto (con un "metodo indiretto") che la funzione $u = g$ è soluzione del problema di minimo. Infatti si ha $F(g) = -\|g\|_2^2$, mentre

$$F(u) = \int_0^1 |u|^2\,dx - 2\int_0^1 gu\,dx \geq \int_0^1 \min\{|u|^2 - 2gu\}\,dx = -\|g\|_2^2 = F(g),$$

ma fingiamo di non saperlo e di cercare di dimostrarne l'esistenza con il metodo diretto. Per far ciò dobbiamo dotare lo spazio X di una topologia. Se come topologia consideriamo quella della norma allora il funzionale è continuo. Infatti, se $u_n \to u$ nella norma di L^2, cioè $\|u_n - u\|_2 \to 0$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$\Big|\int_0^1 gu_n\,dx - \int_0^1 gu\,dx\Big| = \Big|\int_0^1 g(u_n - u)\,dx\Big| = |\langle g, u_n - u\rangle| \leq \|g\|_2\|u_n - u\|_2 \to 0,$$

mentre, usando il fatto che $\|u_n\| \leq \|u_n - u\| + \|u\| \leq C$ e di nuovo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha

$$\int_0^1 |u_n|^2\,dx - \int_0^1 |u|^2\,dx = \langle u_n - u + u, u_n\rangle - \langle u, u\rangle = \langle u_n - u, u_n\rangle + \langle u, u_n\rangle - \langle u, u\rangle \to 0.$$

È chiaro, d'altra parte, che X non è compatto, non essendo limitato.

Cerchiamo allora di vedere se il funzionale F è coercivo. Poichè siamo su uno spazio normato e quindi metrico, la coercività topologica coincide con quella sequenziale. Consideriamo dunque una qualunque successione $u_n \in X$ tale che

$$\int_0^1 |u_n|^2\,dx - 2\int_0^1 g \cdot u_n\,dx \leq M \tag{3.3}$$

e chiediamoci se da essa si può estrarre una sottosuccessione convergente in norma ad una funzione di L^2. Per mostrare che la risposta è negativa basta considerare la successione $u_n(x) = \operatorname{sen}(2\pi nx)$. Infatti, poiché come si verifica con calcolo diretto,

$$\int_0^1 |u_n|^2 dx = \int_0^1 |\operatorname{sen}(2\pi nx)|^2 dx = \frac{1}{2},\,^2 \tag{3.4}$$

e inoltre per Cauchy-Schwarz[3]

$$\Big|\int_0^1 g \cdot u_n\,dx\Big| \leq \|u_n\|_2\|g\|_2 \leq \|g\|_2,$$

allora la successione u_n soddisfa la (3.3) con qualunque $M \geq \frac{1}{2} + 2\|g\|_2$. D'altra parte (u_n), che oscilla sempre più velocemente al crescere di n, non ammette alcuna sottosuccessione convergente nella norma di L^2. Se infatti, per assurdo, $u_{n_k} \to v$ in L^2 fosse una tale sottosuccessione, allora si avrebbe, sempre per Cauchy-Schwarz, che

$$\langle u_{n_k}, \varphi\rangle \to \langle v, \varphi\rangle. \qquad \forall\, \varphi \in L^2(0,1). \tag{3.5}$$

[2] La successione (u_n) è contenuta nella palla di L^2 di centro 0 e raggio $1/\sqrt{2}$, quindi è limitata. Se fossimo in $\mathbb{R}^n$ potremmo concludere che da essa si può estrarre una sottosuccessione convergente, cosa che invece non succede nello spazio metrico L^2 con la metrica della norma.

[3] La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vale in ogni spazio munito di un prodotto scalare, per la norma da esso indotta (cfr. Rudin [3], 4.2).

D'altra parte, per il Lemma di Riemann-Lebesgue[4] (cfr. Giusti [2], Capitolo secondo, formula [6.4], oppure Rudin [3], sezione 5.14)

$$\langle u_{n_k}, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x) \operatorname{sen}(2\pi n_k x)\, dx \to 0$$

e quindi, in particolare, prendendo $\varphi = v$, si ha

$$\langle v, v \rangle = 0.$$

Da ciò, sempre usando il fatto che $u_{n_k} \to v$ nella norma di L^2, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e la (3.4) si ottiene l'assurdo

$$\frac{1}{2} = \langle u_{n_k}, u_{n_k} \rangle \to \langle v, v \rangle = 0.$$

Il funzionale F non è quindi coercivo e il metodo diretto non si applica. Si può pensare però di indebolire la topologia di X, in modo che vi siano più successioni convergenti, eventualmente rinunciando alla continuità ma salvando la semicontinuità inferiore. Questo si può fare introducendo una topologia (detta *debole*) che faccia si che successioni del tipo di quelle considerate prima (cioè $u_n(x) = \operatorname{sen}(2\pi nx)$) risultino convergenti. La cosa più naturale è definire la convergenza in questa nuova topologia a partire dalla (3.5), dando cioè la seguente definizione:

$$u_n \to u \ \text{ debolmente in } L^2 \iff \langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \quad \forall\, \varphi \in L^2(0,1).$$

Per Cauchy-Schwarz si ha che

$$u_n \to u \text{ fortemente (cioè in norma)} \Rightarrow u_n \to u \ \text{ debolmente}$$

mentre il viceversa non vale e un controesempio è dato dalla successione $u_n(x) = \operatorname{sen}(2\pi nx)$, considerata prima, che infatti soddisfa la (3.5) con $v = 0$ ma non converge fortemente.

Per snellire la notazione, d'ora in poi riserveremo il simbolo $\rightharpoonup$ alla convergenza debole e $\to$ a quella forte.

Tornando al funzionale F, si ha

$$u_n \rightharpoonup u \ \Rightarrow \int_0^1 g u_n\, dx = \langle u_n, g \rangle \to \langle u, g \rangle = \int_0^1 g u_n\, dx$$

quindi il termine lineare in u è continuo rispetto alla convergenza debole. Per quanto riguarda il termine in u^2, supponiamo sempre che $u_n \rightharpoonup u$ e osserviamo che, per Cauchy-Schwarz

$$|\langle u_n, u \rangle| \le \|u_n\|_2 \|u\|_2$$

e, passando al liminf per $n \to \infty$ ambo i membri si ha

$$\|u\|_2^2 \le \|u\|_2 \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_2$$

da cui, dividendo per $\|u\|_2 \neq 0$ si ottiene

$$\|u\|_2 \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_2$$

[4]Si usa qui il fatto che ogni funzione di L^2 è integrabile. In particolare, infatti, se la misura di Ω è finita, allora $L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ dove $L^1(\Omega)$ è definito come lo spazio delle funzioni u tali che $\int_\Omega |u| dx < +\infty$ modulo la relazione di equivalenza che identifica funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla secondo Lebesgue. $L^1(\Omega)$ si può dotare della norma $\|u\|_1 = \int_\Omega |u|\, dx$ rispetto a cui è completo (cfr. Brezis [1], Théoréme IV.8, oppure Rudin [3], Teorema 3.11). $L^1(\Omega)$ è quindi uno spazio di Banach.

che, d'altra parte, vale anche se $u = 0$. Ne consegue che la norma di L^2 (e quindi anche la norma al quadrato) è un funzionale sequenzialmente semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole. Ne consegue che anche il funzionale F è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente. Essendo anche debolmente sequenzialmente coercivo, cosa però più difficile da provare[5] l'applicazione della versione sequenziale del teorema di Tonelli garantisce l'esistenza di un punto di minimo. L'unicità del punto di minimo si può dedurre invece dalla stretta convessità in u del funzionale F, in accordo con quanto segue.

Definizione 3.4 *Sia X uno spazio vettoriale e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. f si dice* convessa *se per ogni $t \in]0,1[$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $f(x) < +\infty$ e $f(y) < +\infty$ si ha*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

f si dice strettamente convessa *se f non è identicamente $+\infty$ e per ogni $t \in]0,1[$ e per ogni $x, y \in X$ tali che $x \neq y$, $f(x) < +\infty$ e $f(y) < +\infty$ si ha*

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

Proposizione 3.5 *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione strettamente convessa. Allora f ha al più un punto di minimo in X.*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo per assurdo che x e y siano due punti di minimo per f in X, allora

$$f(x) = f(y) = \min_{z \in X} f(z) < +\infty.$$

Se $x \neq y$, per la stretta convessità di f abbiamo che

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = \min_{z \in X} f(z) < +\infty,$$

in contraddizione col fatto che x e y siano punti di minimo. Allora $x = y$. □

Se si volesse considerare invece il problema di minimo

$$\min F(u) = \int_0^1 \frac{|u'|^2}{2}\, dx - \int_0^1 g \cdot u \, dx$$

con $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ soddisfacente la condizione di Dirichlet $u(0) = 0$ e $g \in L^2(0,1)$ (si tratta di un caso particolare di (1.5)), come spazio X su cui ambientare il problema di minimo sarebbe abbastanza naturale considerare

$$X = \{u \in L^2(0,1) \ : \ u \text{ derivabile in } (0,1) \text{ e continua in } 0,\ u' \in L^2(0,1) \text{ e } u(0) = 0\},$$

su cui il funzionale è ben definito. Anche in questo caso si potrebbero fare considerazioni analoghe alle precedenti ma rese più complicate dalla maggiore complessità di X. A pensarci bene, poi, non sarebbe nemmeno necessario richiedere che u sia derivabile in $(0,1)$, ma basterebbe che lo fosse quasi ovunque. In ogni caso il problema si riduce sempre a scegliere un opportuno spazio di funzioni con un'opportuna topologia, abbastanza debole da garantire la coercività e abbastanza forte da garantire la semicontinuità. Nel caso di funzionali in cui non compaiono derivate a questa necessità si può far fronte con gli spazi L^p e le relative topologie deboli. Per funzionali con derivate si può invece ricorrere agli spazi di Sobolev.

[5] Si vede facilmente, usando la nota disuguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$, che $F(u_n) \leq K$ implica che $\|u_n\|_2 \leq C$ per un'opportuna costante C, e la conclusione, come vederemo in seguito (Teoremi di Kakutani e di Alaoglu) seguirà dal fatto che, come succede in $\mathbb{R}^n$, le palle chiuse sono compatte per la topologia debole (mentre come abbiamo visto non lo sono per la forte).

Bibliografia

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.

[2] E. Giusti, *Analisi matematica 2*, Boringhieri.

[3] W. Rudin, *Analisi reale e complessa*, Boringhieri.