Capitolo 2

Generalizzazioni del Teorema di Weierstrass

Il principale riferimento bibliografico per questa lezione è il testo di Checcucci, Tognoli, Vesentini [1].

Introduzione

Supponiamo che $X = \mathbb{R}^n$. È noto (teorema di Weierstrass) che se K è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ e $f : K \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora f ha massimo e minimo.

In effetti se si guarda alla dimostrazione del teorema di Weierstrass con le successioni ci si accorge che, se ci si accontenta di provare l'esistenza del minimo, cosa a cui siamo maggiormente interessati, la condizione di continuità

$$x_n \to x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

può essere sostituita con la più debole

$$x_n \to x \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Per l'esistenza del minimo non è dunque necessario che la funzione sia continua, ma basta che sia *semicontinua inferiormente.*

A pensarci bene, non serve nemmeno che il dominio di f sia compatto, ma basta che siano relativamente compatti gli insiemi di sottolivello (e il dominio di f essere anche tutto $\mathbb{R}^n$), cioè che f sia *coerciva.* Questo succede, ad esempio, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$.

Poichè siamo interessati a casi in cui X è uno spazio di funzioni e quindi uno spazio topologico più generale di $\mathbb{R}^n$ (molto spesso si tratterà di uno spazio metrico) introdurremo le nozioni di semicontinuità e di coercività in ambito più generale.

Preliminari topologici

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Dato un punto $x \in X$ denoteremo con $\mathscr{U}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di X.

Definizione 2.1 (Primo assioma di numerabilità (N_1)) *Si dice che X soddisfa al* primo assioma di numerabilità *se ogni punto di x ammette un* sistema fondamentale di intorni numerabile *(cioè una famiglia numerabile di intorni di x tale che ogni intorno di x contiene un intorno della famiglia).*

Definizione 2.2 (Secondo assioma di numerabilità (N_2)) *Si dice che X soddisfa al* secondo assioma di numerabilità*, o che è a* base numerabile*, se esiste una base di aperti numerabile per la topologia di X (cioè esiste una famiglia numerabile di aperti tale che ogni altro aperto è unione di aperti della famiglia).*

Si potrebbe dimostrare che $N_2 \Rightarrow N_1$.

Osservazione 2.3 Gli spazi metrici soddisfano il primo assioma di numerabilità. In genere uno spazio metrico non soddisfa il secondo assioma di numerabilità (esempio $\mathbb{R}$ con la topologia discreta) a meno che non si supponga che sia *separabile* cioè che contenga un sottoinsieme numerabile denso. È questo il caso degli spazi metrici compatti che vedremo nella prossima sezione. In ogni caso, gli spazi metrici separabili soddisfano entrambi gli assiomi di numerabilità.

Compattezza

Sia X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ (anche eventualmente $Y = X$). Una famiglia $\{A_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X si dice un *ricoprimento* di Y se

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq Y.$$

Se ciascuno degli A_i è aperto si parla di *ricoprimento aperto*.

Definizione 2.4 *Y si dice* compatto *se ogni ricoprimento aperto $\{A_i\}_{i\in I}$ di Y ammette un sottoricoprimento finito, cioè esiste un sottoinsieme finito di indici $J \subset I$ tale che $\cup_{i\in J} A_i \supseteq Y$.*

Osservazione 2.5 Se Y è compatto in X rispetto ad una topologia τ allora resta compatto anche in ogni topologia più debole (cioè meno fine).

Proposizione 2.6 *I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea sono tutti e soli quelli chiusi e limitati.*

È subito visto che questa proprietà non è soddisfatta in tutti gli spazi topologici. Per esempio, in uno spazio X costituito da almeno due punti con la topologia banale un punto è un sottoinsieme compatto ma non chiuso (il complementare non è aperto). Negli spazi metrici le cose vanno un po' meglio, nel senso che vale una delle due implicazioni del teorema precedente. Precisamente:

Proposizione 2.7 *Sia X uno spazio metrico e $K \subseteq X$. K compatto $\Rightarrow$ K chiuso e limitato.*

È importante però rilevare che il viceversa in generale non è vero nemmeno negli spazi metrici dove i compatti sono caratterizzati dal fatto di essere *completi* e *totalmente limitati* (per ogni $\varepsilon > 0$ sono contenuti in un'unione finita di palle di raggio ε) che sono condizioni più forti della chiusura e della limitatezza. Tuttavia come vedremo gli spazi metrici sono meglio degli altri almeno per il fatto che la compattezza è caratterizzabile sequenzialmente nello stesso modo di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.8 *Y si dice* sequenzialmente compatto *se da ogni successione di elementi di Y è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in Y.*

Tra compattezza e compattezza sequenziale non vale, in generale, alcuna delle due implicazioni. Tuttavia le due nozioni coincidono negli spazi metrici.

Teorema 2.9 *Sia X uno spazio metrico e $Y \subseteq X$. Y è compatto se e solo se è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione (schema) $\Rightarrow$ Sia (y_n) una successione di elementi di Y. Se i suoi valori costituiscono un insieme finito allora esiste una sottosuccessione costante convergente a uno dei valori della successione che è ovviamente un punto di Y. Se l'insieme dei valori della successione è infinito, usando il fatto che gli spazi metrici soddisfano il primo assioma di numerabilità si dimostra, come nel teorema di Bolzano-Weierstrass, che la successione ha almeno un punto di accumulazione. La conclusione segue dal fatto che K è chiuso.

$\Leftarrow$ È più complicata e gioca un ruolo essenziale il fatto che uno spazio metrico compatto è separabile, e quindi soddisfa anche il secondo assioma di numerabilità. $\square$

Osservazione 2.10 Se K è un sottoinsieme compatto di uno spazio topologico X allora K è uno spazio topologico compatto per la topologia indotta da X.

Ne consegue che ogni proprietà stabilita per gli spazi topologici compatti si può applicare anche a tutti i sottoinsiemi compatti riguardandoli come spazi topologici compatti con la topologia di sottospazio.

Proposizione 2.11 *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto.*

Dimostrazione Sia X compatto e C un sottoinsieme chiuso. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di aperti tali che

$$C \subseteq \cup_{i\in I} A_i.$$

Il complementare C' è aperto e si ha

$$X = C \cup C' \subseteq \big(\cup_{i\in I} A_i\big) \cup C'.$$

Poichè X è compatto esiste $J \subseteq I$ finito tale che

$$X \subseteq \big(\cup_{j\in J} A_j\big) \cup C'.$$

Ne segue che

$$C \subseteq \cup_{j\in J} A_j$$

e pertanto C è compatto. $\square$

La proprietà dell'intersezione finita

Definizione 2.12 *Si dice che una famiglia $\{B_i\}_{i\in I}$ ha la* proprietà dell'intersezione finita *se per ogni sottoinsieme finito J di I l'intersezione $\cap_{j\in J} B_j$ è non vuota.*

Con la proprietà dell'intersezione finita si può dare la seguente caratterizzazione degli insiemi compatti.

Teorema 2.13 *Sia X uno spazio topologico. X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi di X che abbia la proprietà dell'intersezione finita ha un'intersezione non vuota.*

Dimostrazione ($\Rightarrow$) Sia $\{C_i\}$ una famiglia di chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita e supponiamo per assurdo che

$$\cap_{i\in I} C_i = \varnothing.$$

Allora
$$X = \big(\cap_{i\in I} C_i \big)' = \cup_{i\in I} C_i'.$$
Poichè X è compatto allora esiste J finito tale che
$$X = \cup_{j\in J} C_J',$$
vale a dire
$$\cap_{j\in J} C_J = \varnothing$$
contro la proprietà dell'intersezione finita.

($\Leftarrow$) Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora, posto $C_i = A_i'$ per ogni $i \in I$, si ha che $\{C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi tale che $\cap_{i\in I} C_i = (\cup_{i\in I} A_i)' = \varnothing$. Per ipotesi dunque la famiglia $\{C_i\}_{i\in I}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita. Ma allora esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\cap_{j\in J} C_j = \varnothing$ e quindi $\cup_{j\in J} A_j = (\cap_{j\in J} C_j)' = X$. Allora $\{A_j\}_{j\in J}$ è un sottoricoprimento finito e X risulta compatto per l'arbitrarietà del ricoprimento $\{A_i\}_{i\in I}$. □

Semicontinuità

Definiamo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. In $\overline{\mathbb{R}}$ considereremo sempre la topologia in cui gli intorni sono definiti come in $\mathbb{R}$ ed in più

- un intorno di $-\infty$ è qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo del tipo $[-\infty, a[$,
- un intorno di $+\infty$ è qualunque sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$ contenente un intervallo del tipo $]b, +\infty]$.

Definizione 2.14 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice*

- *semicontinua inferiormente se $f^{-1}(]c, +\infty]) = \{x \in X \ : \ f(x) > c\}$ è aperto in X (o equivalentemente se l'insieme di sottolivello $\{x \in X \ : \ f(x) \le c\}$ è chiuso) per ogni $c \in \mathbb{R}$;*
- *semicontinua superiormente se $f^{-1}([-\infty, c[) = \{x \in X \ : \ f(x) < c\}$ è aperto in X per ogni $a \in \mathbb{R}$.*

Esempio 2.15 Le funzioni caratteristiche di aperti sono semicontinue inferiormente, mentre le funzioni caratteristiche di chiusi sono semicontinue superiormente.

Esempio 2.16 Sia S un sottoinsieme di X. Si chiama *funzione indicatrice* di S la funzione
$$\chi_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in S \\ +\infty & \text{se } x \in X \setminus S \end{cases}$$
Le funzioni indicatrici di aperti sono semicontinue superiormente, mentre le funzioni indicatrici di chiusi sono semicontinue inferiormente.

Ricordiamo che una funzione è continua se le controimmagini degli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ sono aperti in X. Il seguente teorema è di agevole dimostrazione se si usa il fatto, non banale, che ogni aperto di $\overline{\mathbb{R}}$ si può scrivere come unione di intervalli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ (quindi compresi quelli del tipo $[-\infty, a[$ e $]b, +\infty]$), cioè gli intervalli aperti costituiscono una *base* per la topologia di $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 2.17 *f è continua se e solo se è semicontinua superiormente e inferiormente.*

Dimostrazione La necessità è banale. Proviamo la sufficienza, cioè supponiamo che f sia semicontinua superiormente ed inferiormente e dimostriamo che è continua. Sia A un insieme aperto di $\overline{\mathbb{R}}$, allora

$$A = \cup_{\gamma \in I} J_\gamma$$

dove J_γ sono intervalli aperti del tipo $]\alpha_\gamma, \beta_\gamma[$, $]\alpha_\gamma, +\infty]$ o $[-\infty, \beta_\gamma[$. Dimostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto. Poiché

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\big(\cup_{\gamma \in I} J_\gamma\big) = \cup_{\gamma \in I} f^{-1}\big(J_\gamma\big),$$

e, poiché in conseguenzea delle ipotesi di semicontinuità ciascuno degli insiemi $f^{-1}\big(J_\gamma\big)$ è aperto (in particolare si usa il fatto che $f^{-1}(]\alpha, \beta[) = f^{-1}(]\alpha, +\infty][) \cap f^{-1}([-\infty, \beta[))$, allora $f^{-1}(A)$ è aperto perché è unione di insiemi aperti. $\square$

Dal momento che, fissato c, $\{x \in X \ : \ f(x) > c\}$ è aperto in X se e solo se per ogni $x \in X$ tale che $f(x) > c$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) > c$ per ogni $y \in U$, è naturale porre la seguente definizione.

Definizione 2.18 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* semicontinua inferiormente nel punto *x se e solo se per ogni $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > c$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) > c$ per ogni $y \in U$.*

Esercizio 2.19 Scrivere, in analogia con la precedente, la definizione di funzione semicontinua superiormente in un punto x.

Chiaramente, f è s.c.i. in X se e solo se f è s.c.i. in x per ogni $x \in X$.

Teorema 2.20 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente nel punto x se e solo se*

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y) = f(x) \wedge \liminf_{y \to x} f(y) \leq \liminf_{y \to x} f(y). \tag{2.1}$$

Dimostrazione Ricordiamo che, per definizione,

$$\liminf_{y \to x} f(y) = \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U \setminus \{x\}} f(y),$$

quindi l'uguaglianza e la seconda disuguaglianza sono immediate. Supponiamo che f sia semicontinua inferiormente, e dimostriamo la prima. A tal scopo, preso un arbitrario $\varepsilon > 0$ sia $c = f(x) - \varepsilon$. Allora, per la definizione 2.18, esiste un intorno U di x tale che

$$\inf_{y \in U} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

e si ha quindi, a maggior ragione

$$\sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

e la disuguaglianza cercata si ottiene ora passando al limite per $\varepsilon \to 0$. Viceversa, supponiamo che f soddisfi la condizione

$$f(x) \leq \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y),$$

e sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) > c$. Allora

$$c < \sup_{U \in \mathscr{U}(x)} \inf_{y \in U} f(y)$$

e pertanto esiste $U \in \mathscr{U}(x)$ tale che $\inf_{y \in U} f(y) > c$, da cui $f(y) > c$ per ogni $y \in U$, e quindi per la definizione 2.18 f è semicontinua inferiormente in x. $\square$

Osservazione 2.21 Osservato che

$$\sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y) \le \sup_{U\in\mathscr{U}(x)} f(x) = f(x),$$

allora si ha sempre che

$$f(x) \ge \sup_{U\in\mathscr{U}(x)} \inf_{y\in U} f(y),$$

e quindi la prima disuguaglianza in (2.1) è in realtà un'uguaglianza.

Semicontinuità sequenziale

Definizione 2.22 *Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* sequenzialmente semicontinua inferiormente *in un punto $x \in X$ se*[1]

$$f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \quad \textit{per ogni } x_n \to x.$$

È facile verificare, utilizzando il Teorema 2.20 che la semicontinuità implica la semicontinuità sequenziale. Il viceversa, che non vale in generale (vedi Dal Maso [2], Example 1.6), è però vero negli spazi topologici che soddisfano il primo assioma di numerabilità e quindi negli spazi metrici. Vale cioè il seguente teorema.

Teorema 2.23 *Sia X uno spazio topologico soddisfacente al primo assioma di numerabilità. Una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$ se e solo se f è sequenzialmente semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$.*

Dimostrazione Dimostriamo la necessità lasciando la sufficienza, che come già detto vale anche se X non soddisfa al primo assioma di numerabilità, per esercizio. Supponiamo dunque che f sia sequenzialmente semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$ e supponiamo per assurdo che non sia semicontinua inferiormente, cioè che esista $c < f(x_0)$ tale che per ogni $U \in \mathcal{U}(x)$ esiste $y \in U$ tale che $f(y) \le c$.

Sia (U_n) un sistema fondamentale numerabile di intorni di x_0 tale che $U_{n+1} \subseteq U_n$ per ogni $n \in N$. Per quanto osservato sopra, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in U_n$ tale che

$$f(y_n) \le c.$$

Allora $y_n \to x_0$ in X e si ha

$$\liminf_{n\to\infty} f(y_n) \le c < f(x_0),$$

contro la semicontinuità inferiore sequenziale. □

Le seguenti proprietà delle funzioni semicontinue inferiormente sono elementari e seguono direttamente dalle definizioni.

Proposizione 2.24 *Sia $\{f_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.) definite su X. Si ha che*

- *la funzione $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ è s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.);*
- *se I è finito allora la funzione $g(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ è s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.).*

Proposizione 2.25 *Se f e g sono s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.) e se $f + g$ è ben definita, allora $f + g$ è s.c.i. (rispettivamente seq. s.c.i.).*

[1] Ricordiamo che $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\ge n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} f(x_k)$.

Applicazioni a problemi di minimo

Teorema 2.26 (Weierstrass). *Sia X un spazio topologico, $K \subseteq X$ e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ Assumiamo che*

1. *f sia semicontinua inferiormente su X;*
2. *K sia compatto e chiuso.*

Allora esiste il minimo di f su K.

Dimostrazione (Caso sequenziale) Diamo la dimostrazione dapprima nel caso in cui X è uno spazio metrico così si possono usare le caratterizzazioni sequenziali della semicontinuità e della compattezza. Sia (x_n) una successione *minimizzante*, cioè una successione di punti di U tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_K f$$

(dimostrare per esercizio che una successione siffatta esiste sempre, usando le proprietà dell'estremo inferiore). Poichè K è compatto, esiste (x_{n_k}) tale che $x_{n_k} \to x \in K$, ma f è semicontinua inferiormente, quindi

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_K f.$$

da cui segue che x è un punto di minimo. □

Dimostrazione (Caso generale) Se f è la costante $+\infty$ non c'è nulla da provare. Altrimenti si ha

$$\inf\{f(x) \ : \ x \in K\} = M < +\infty$$

Poichè f è s.c.i. allora per ogni t l'insieme

$$C_t := \{x \in K : \ f(x) \leq t\} = K \cap \{x \in X : \ f(x) \leq t\}$$

è un sottoinsieme chiuso di K (come intersezione di due chiusi; qui si usa l'ipotesi: K chiuso) e quindi è compatto; per $t > M$ è anche non vuoto. La famiglia di chiusi $\{C_t\}_{t>M}$ essendo monotona crescente rispetto all'inclusione, gode della proprietà dell'intersezione finita e quindi, siccome K è compatto, non può essere vuoto l'insieme

$$\bigcap_{t>M} \{x \in K : \ f(x) \leq t\} = \{x \in K \ : \ f(x) \leq M\}.$$

□

Bibliografia

[1] V. Checcucci, A. Tognoli, and E. Vesentini, *Lezioni di topologia generale*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[2] G. Dal Maso, *An introduction to γ-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.