

# Capitolo 1

## Lo spazio degli eventi

### 1.1 Spazio puntuale euclideo

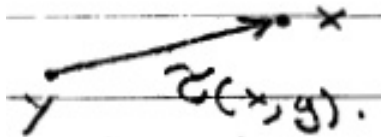
**Definizione 1.1** Sia  $\mathcal{V}$  uno spazio vettoriale  $n$ -dimensionale reale munito di un prodotto scalare definito positivo. Un insieme  $\mathcal{E}$  si dice uno spazio puntuale euclideo  $n$ -dimensionale associato a  $\mathcal{V}$  se esiste una funzione

$$\tau : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$$

tale che

1.  $\tau(x, y) = \tau(x, z) + \tau(z, y) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{E}$ ;
2.  $\forall y \in \mathcal{E}, \forall v \in \mathcal{V} \exists! x \in \mathcal{E} : \tau(x, y) = v$ .

Gli elementi di  $\mathcal{E}$  sono chiamati punti, mentre  $\mathcal{V}$  è lo spazio delle traslazioni e i suoi elementi sono le traslazioni di  $\mathcal{E}$ . Diremo che  $\tau(x, y)$  è il vettore determinato dal punto "finale"  $x$  e dal punto "iniziale"  $y$ .



Usualmente si scrive  $\tau(x, y) = x - y$ . Con questa notazione 1. e 2. si riscrivono

1.  $x - y = (x - z) + (z - y) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{E}$ ;
2.  $\forall y \in \mathcal{E}, \forall v \in \mathcal{V} \exists! x \in \mathcal{E} : x - y = v$ .

La seguente proposizione riassume altre proprietà di  $\tau$ .

**Proposizione 1.2** Con le notazioni introdotte sopra si ha

- i)  $x - x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{E}$ ;
- ii)  $x - y = -(y - x) \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$ ;
- ii)  $x - y = x' - y' \Rightarrow x - x' = y - y'$ .

DIMOSTRAZIONE *i*) segue dalla 1. con  $x = y = z$ . *ii*) segue dalla 1. con  $x = y$ . Per dimostrare la *iii*) osserviamo che

$$\begin{aligned} x - y' &= (x - y) + (y - y') \\ &= (x - x') + (x' - y'). \end{aligned}$$

La *iii*) segue da

$$(x - x') + (x' - y') = (x - y) + (y - y')$$

dato che  $x - y = x' - y'$ . □

Il punto  $x$  la cui esistenza è postulata dalla 2. si denota solitamente con  $x = y + v$ . La matrice indotta dal prodotto scalare in  $\mathcal{V}$  si traduce in una metrica in  $\mathcal{E}$  data da

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)}$$

per ogni  $x, y \in \mathcal{E}$ .

Un *sistema di coordinate cartesiane* consiste in un punto fisso di  $\mathcal{E}$ , indicato con  $O$ , e da una base ortonormale  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  di  $\mathcal{V}$ . Per ogni punto  $x \in \mathcal{E}$ , il vettore  $x - O \in \mathcal{V}$  può essere rappresentato come

$$x - O = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Gli  $n$  scalari che formano l' $n$ -upla ordinata  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sono detti *coordinate di  $x$* .

## 1.2 Eventi e osservatori

La nozione di *evento* è assunta come primitiva, ma sarà in parte specificata dalle proprietà matematiche che gli verranno attribuite in seguito.

L'insieme degli eventi sarà denotato con  $\mathcal{W}$  (world). Per dare un ordine agli eventi introduciamo una mappa

$$\Theta : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{T}$$

dove  $\mathcal{T}$  è uno spazio puntuale euclideo unidimensionale. L'applicazione  $\Theta$  è detta *orologio* e consente di stabilire se un evento viene prima o dopo. Siccome  $\mathcal{T}$  è isomorfo ad  $\mathbb{R}$ , eredita da quest'ultimo un ordinamento, in base al quale diremo che l'evento  $e$  precede (o è simultaneo) ad  $e^*$  se  $\Theta(e) < \Theta(e^*)$  (o  $\Theta(e) = \Theta(e^*)$ ). Per altri versi la mappa  $\Theta$  è in larga misura arbitraria.

Fissato un orologio  $\Theta$  è possibile definire l'insieme degli eventi  $\mathcal{W}_t$  che accadono all'istante  $t \in \mathcal{T}$ :

$$\mathcal{W}_t = \Theta^{-1}(t).$$

Chiameremo *posizionamento*, associato all'orologio  $\Theta$ , al tempo  $t$  un'applicazione biunivoca

$$\overset{\circ}{\Pi}_t : \mathcal{W}_t \rightarrow \mathcal{E}$$

dove  $\mathcal{E}$  è uno spazio puntuale euclideo tridimensionale. La mappa associa ad ogni evento al tempo  $t$  una posizione in uno spazio euclideo.

Un *osservatore* è un'applicazione biunivoca

$$\overset{\circ}{\Pi} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{T}$$

definita da un orologio  $\Theta : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{T}$  e ad ogni istante  $t$  da un posizionamento  $\overset{\circ}{\Pi}_t : \mathcal{W}_t \rightarrow \mathcal{E}$  in modo che

$$\overset{\circ}{\Pi}(e) = (x, t)$$

dove

$$t = \Theta(e) \quad \text{ed} \quad x = \overset{\circ}{\Pi}_t(e).$$

Quindi ad ogni evento un osservatore dà una localizzazione spaziale e temporale.

Osservatori diversi potranno associare allo stesso evento posizioni e tempi diversi.

*Considereremo soltanto osservatori che preservano le distanze spaziali e temporali oltre all'ordine degli eventi.* Assumiamo cioè il seguente assioma.

**Assioma 1.3** Per ogni coppia di osservatori  $\overset{\circ}{\Pi}$  ed  $\overset{\circ}{\Pi}^*$  si ha:

i) se  $\Theta(e) \geq \Theta(\tilde{e})$  allora

$$\Theta(e) - \Theta(\tilde{e}) = \Theta^*(e) - \Theta^*(\tilde{e});$$

ii) se  $\Theta(e) = \Theta(\tilde{e}) = t$  e  $\Theta^*(e) = t^*$  allora, per la i),  $\Theta^*(\tilde{e}) = t^*$  e inoltre

$$|\overset{\circ}{\Pi}_t(e) - \overset{\circ}{\Pi}_t(\tilde{e})| = |\overset{\circ}{\Pi}_{t^*}^*(e) - \overset{\circ}{\Pi}_{t^*}^*(\tilde{e})|.$$

Prima di procedere a stabilire alcune conseguenze di questo assioma, ricordiamo che è noto dall'algebra lineare che ogni spazio vettoriale di dimensione  $n$  è isomorfo ad  $\mathbb{R}^n$ . Ne consegue che nel seguito  $\mathcal{V}$  e quindi  $\mathcal{E}$  potranno essere sempre identificati con  $\mathbb{R}^3$  (ma rispettivamente come spazio di vettori e di punti). Analogamente  $\mathcal{T}$  potrà essere identificato con  $\mathbb{R}$ .

Per stabilire alcune conseguenze dell'assioma sarà utile il seguente lemma. Indicheremo con

$$O(n) = \{Q \in \mathbb{R}^{n \times n} : Q^T Q = I\}$$

l'insieme (di fatto un gruppo moltiplicativo) delle matrici ortogonali di ordine  $n$  ( $\mathbb{R}^{n \times n}$  indica le matrici reali di ordine  $n$  e  $Q^T$  denota la trasposta di  $Q$ ).

**Lemma 1.4** Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'isometria (di spazi vettoriali), cioè

$$|f(u) - f(v)|^2 = |u - v|^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Allora esiste  $Q \in O(n)$  tale che

$$f(u) = f(v) + Q(u - v).$$

Vale anche il viceversa.

**DIMOSTRAZIONE** Il viceversa è un facile esercizio; infatti, se  $f(u) = f(v) + Q(u - v)$  allora

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &= |Q(u - v)|^2 = [Q(u - v)]^T [Q(u - v)] \\ &= (u - v)^T Q^T Q (u - v) = (u - v)^T (u - v) = |u - v|^2. \end{aligned}$$

La dimostrazione della sufficienza è invece molto più complicata. Un modo di provarla è quello di utilizzare un risultato piuttosto raffinato di teoria della misura noto come Teorema di Rademacher (cfr. ad esempio Evans e Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Capitolo 3 oppure Ziemer, *Weakly differentiable functions*), che afferma che le funzioni Lipschitziane (e quindi le isometrie in particolare) di  $\mathbb{R}^n$  in sé sono funzioni differenziabili quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ . Partiamo dunque dall'ipotesi che  $f$  sia un'isometria. Allora si ha

$$[f(u) - f(v)] \cdot [f(u) - f(v)] = (u - v) \cdot (u - v).$$

Differenziando rispetto ad  $u$  si ottiene

$$(1.1) \quad \nabla f(u)^T [f(u) - f(v)] = u - v$$

per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $u$  in  $\mathbb{R}^n \setminus N$  dove  $N$  è un insieme di misura nulla che non dipende da  $v$ . Differenziando quest'ultima rispetto a  $v$  si ottiene

$$(1.2) \quad \nabla f(u)^T \nabla f(v) = I$$

per quasi ogni  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Prendendo  $u = v$  si ha  $\nabla f(u)^T \nabla f(u) = I$ , cioè  $\nabla f(u) \in O(n)$  per quasi ogni  $u \in \mathbb{R}^n$ . Dalla (1.2), moltiplicando a sinistra per  $\nabla f(u)$ , si ottiene allora che  $\nabla f(u) = \nabla f(v)$  per quasi ogni  $u$  e  $v$ , cioè esiste una matrice ortogonale  $Q$  tale che  $\nabla f(u) = Q$  per quasi ogni  $u$ . Infine, dalla (1.2) si ha  $f(u) - f(v) = Q(u - v)$  quasi ovunque, quindi su un insieme denso. La tesi segue allora dalla continuità di  $f$ .  $\square$

**Corollario 1.5** *Sia  $h : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  un'isometria (di uno spazio puntuale euclideo), cioè*

$$|h(x) - h(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathcal{E}.$$

*Allora esiste  $Q \in O(n)$  tale che*

$$h(x) - h(y) = Q(x - y).$$

*Vale anche il viceversa.*

**DIMOSTRAZIONE** Fissiamo un punto  $x_0 \in \mathcal{E}$  e, per ogni  $v \in \mathcal{V}$  definiamo

$$f(v) := h(x_0 + v) - h(x_0).$$

Si ha che  $f$  mappa  $\mathcal{V}$  in  $\mathcal{V}$  e, per ogni  $u, v \in \mathcal{V}$

$$|f(u) - f(v)| = |h(x_0 + u) - h(x_0 + v)| = |u - v|,$$

cioè  $f$  è un'isometria dello spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  in sé.

Per il Lemma 1.4 allora esiste  $Q \in O(n)$  tale che  $f(u) - f(v) = Q(u - v)$ , cioè, in termini di  $h$ ,

$$h(x_0 + u) - f(x_0 + v) = Q(u - v)$$

e, preso  $y \in \mathcal{E}$  tale che  $u = y - x_0$  si ha

$$h(y) - h(x) = Q(y - x),$$

cioè la tesi.  $\square$

Consideriamo ora due eventi  $e$  ed  $e_0$  in  $\mathcal{W}$ . Detti

$$t := \Theta(e) \quad \text{e} \quad t^* := \Theta^*(e),$$

dalla *i*) si ha

$$t - \Theta(e_0) = t^* - \Theta^*(e_0)$$

ovvero

$$(1.3) \quad \boxed{t^* = t + a}$$

con  $a = \Theta^*(e_0) - \Theta(e_0)$ ; ovvero, *i tempi "misurati" da due osservatori differiscono soltanto per una costante.*

Vogliamo adesso scoprire che relazione c'è tra le posizioni dei due eventi visti dai diversi osservatori.

Scegliamo allora due eventi simultanei  $e$  ed  $e_0$  in  $\mathscr{W}$ . Ciò può farsi ad esempio scegliendo prima  $e \in \mathscr{W}$ . Si avrà

$$\begin{aligned}\Theta(e) &=: t, & \overset{\circ}{\Pi}_t(e) &=: x(t), \\ \Theta^*(e) &=: t^*, & \overset{\circ}{\Pi}_{t^*}(e) &=: x^*(t) \quad (\text{poiché } t^* = t + a).\end{aligned}$$

Poi scegliamo  $x_0 \in \mathcal{E}$  e

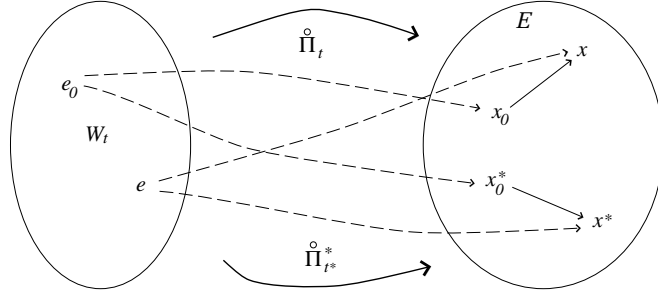
$$e_0 \in \overset{\circ}{\Pi}^{-1}(x_0, t),$$

col che  $\Theta(e_0) = t$  (cioè  $e_0$  è simultaneo ad  $e$ ) e per la *i*) si ha anche  $\Theta^*(e_0) = t^*$ .

Per quanto riguarda le posizioni, la situazione è la seguente

$$\overset{\circ}{\Pi}_t(e_0) = x_0, \quad \overset{\circ}{\Pi}_{t^*}(e_0) =: x_0^*(t).$$

Le mappe  $\overset{\circ}{\Pi}_t$  e  $\overset{\circ}{\Pi}_{t^*}$  sono definite rispettivamente su  $W_t = \Theta^{-1}(t)$  e su  $W_{t^*} = \Theta^{*-1}(t^*)$ . D'altra parte, da *i*) o da *ii*) segue che  $\Theta^{-1}(t) = \Theta^{*-1}(t^*)$ , quindi le due mappe hanno in effetti lo stesso dominio  $\mathscr{W}_t$ .



È pertanto ben definita la seguente mappa tra le posizioni

$$h_t := \overset{\circ}{\Pi}_{t^*} \circ \overset{\circ}{\Pi}_t^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

e si ha

$$h_t(x_0) = x_0^*(t), \quad h_t(x) = x^*(t).$$

Infine, per la *ii*) si ha

$$|h_t(x) - h_t(x_0)| = |x^*(t) - x_0^*(t)| = |\overset{\circ}{\Pi}_{t^*}(e) - \overset{\circ}{\Pi}_{t^*}(e_0)| = |\overset{\circ}{\Pi}_t(e) - \overset{\circ}{\Pi}_t(e_0)| = |x(t) - x_0|$$

cioè  $h_t$  è un'isometria di  $\mathcal{E}$ . Allora, per il corollario, esiste  $Q(t) \in O(3)$  tale che

$$h_t(x) - h_t(x_0) = Q(t)(x(t) - x_0)$$

ovvero

$$(1.4) \quad \boxed{x^*(t) - x_0^*(t) = Q(t)(x(t) - x_0)}$$

La relazioni (1.3) e (1.4) descrivono come cambiano tempi e posizioni al cambiare dell'osservatore e saranno pertanto dette *equazioni del cambiamento di osservatore*.

Si noti che tali relazioni sono del tutto indipendenti da qualunque scelta di un sistema di coordinate in  $\mathcal{E}$  (che infatti non è stato necessario fare). Vediamo invece come esse si riscrivono in componenti una volta che sia stato fissato un sistema di coordinate. Scegliamo quindi un punto  $O \in \mathcal{E}$  e una base ortonormale in  $\mathcal{V}$ . Prendendo in (1.4)  $x_0 = O$  si ha

$$x^*(t) - O^*(t) = Q(t)(x(t) - O).$$

Per esprimere i vettori indicati nella base fissata conviene riscrivere la relazione precedente nella forma

$$x^*(t) - O = O^*(t) - O + Q(t)(x(t) - O)$$

e introdurre la componenti di ciascun vettore attraverso le loro rappresentazioni

$$\begin{aligned} x^*(t) - O &= \sum_{i=1}^3 x_i^*(t) e_i \\ x(t) - O &= \sum_{i=1}^3 x_i(t) e_i \\ O^*(t) - O &= \sum_{i=1}^3 O_i^*(t) e_i, \\ [Q(t)(x(t) - O)] &= \sum_{i=1}^3 [Q(t)(x(t) - O)]_i e_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(t) x_j(t) e_i. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$(1.5) \quad \boxed{x_i^*(t) = O_i^*(t) + \sum_{j=1}^3 Q_{ij}(t) x_j(t), \quad i = 1, 2, 3.}$$

### 1.3 Cambiamento del sistema di coordinate

Consideriamo un'unica osservatore e due sistemi di coordinate. Un primo sistema avrà origine in  $O$  e sarà costituito da una base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  di  $\mathcal{V}$ . Un secondo avrà origine in  $\tilde{O}$  e sarà costituito da una base ortonormale  $\{\tilde{e}_1(t), \tilde{e}_2(t), \tilde{e}_3(t)\}$ .

È noto dall'algebra lineare (cfr. Lang, Algebra Lineare, Th. 1, pag. 86) che esiste un'unica applicazione lineare  $\tilde{Q}(t) : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  tale che

$$(1.6) \quad \tilde{e}_i = \tilde{Q}(t) e_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Fissata una base in  $\mathcal{V}$  questa applicazione lineare si rappresenta con una matrice, che denotiamo ancora con  $\tilde{Q}(t)$ .

**Esercizio 1.6** *Dimostrare che  $\tilde{Q}(t)$  è una matrice ortogonale.*

*Svolgimento.* Usando il fatto che la base  $\{\tilde{e}_1(t), \tilde{e}_2(t), \tilde{e}_3(t)\}$  è ortogonale, la (1.6) e la definizione di matrice ortogonale si ha

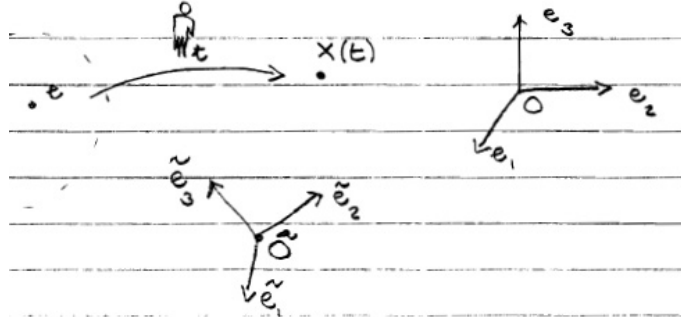
$$\delta_{ij} = \tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j = \tilde{Q} e_i \cdot \tilde{Q} e_j = \tilde{Q}^T \tilde{Q} e_i \cdot e_j.$$

Da queste relazioni segue che  $\tilde{Q}^T \tilde{Q} e_i \parallel e_i$ , ovvero  $\tilde{Q}^T \tilde{Q} e_i = \lambda e_i$  per un opportuno  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si ha dunque

$$1 = \delta_{ii} = \tilde{Q}^T \tilde{Q} e_i \cdot e_i = \lambda, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dunque  $\lambda = 1$  e quindi  $\tilde{Q}^T \tilde{Q} e_i = e_i$  per  $i = 1, 2, 3$ , cioè  $\tilde{Q}^T \tilde{Q}$  rappresenta una funzione lineare che mappa la base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  in se stessa e quindi  $\tilde{Q}^T \tilde{Q} = I$ , c.v.d..

Si consideri un evento  $e \in \mathcal{W}$  e sia  $x(t) = \overset{\circ}{\Pi}_t(e)$ .



Osserviamo che

$$(1.7) \quad x(t) - O = (x(t) - \tilde{O}(t)) + (\tilde{O}(t) - O).$$

Siccome rispetto alla base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  si ha

$$\begin{aligned} x(t) - O &= \sum_{j=1}^3 x_j(t) e_j, \\ x(t) - \tilde{O}(t) &= \sum_{j=1}^3 \tilde{x}_j(t) \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^3 x_j(t) \tilde{Q}(t) e_j, \\ \tilde{O}(t) - O &= \sum_{j=1}^3 \tilde{O}_j(t) e_j, \end{aligned}$$

allora sostituendo nella (1.7) si ha

$$\sum_{j=1}^3 x_j(t) e_j = \sum_{j=1}^3 \tilde{x}_j(t) \tilde{e}_j + \sum_{j=1}^3 x_j(t) \tilde{Q}(t) e_j$$

e, moltiplicando scalarmente per  $e_j$  ed usando il fatto che le coordinate dei vettori  $e_j$  nella base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  sono

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1),$$

si ottiene

$$x_i(t) = \tilde{O}_i(t) + \sum_{j=1}^3 \tilde{Q}_{ij}(t) \tilde{x}_j(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Si osservi che essenzialmente l'equazione di cambiamento di coordinate ha la stessa struttura di quella del cambiamento di osservatore (la (1.5)). Il significato è, ovviamente, completamente diverso.