Facoltà di Scienze M.F.N.

Corso di Laurea in Tecnologie Web e Multimediali
A.A. 2008-2009

A

Prova di esonero di Analisi Matematica del 05/02/2009

Parte seconda

Istruzioni: scrivere la risposta nel riquadro a fianco dell'esercizio ed allegare lo svolgimento completo. Apporre nome, cognome e numero di matricola su ogni foglio. Prima della consegna indicare nell'apposito spazio il numero totale di fogli di cui è composto l'elaborato.

Cognome	Nome
no. fogli (compreso questo)	N. Matricola

1. Sapendo che $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$, dimostrare che tutti i numeri del tipo $a\sqrt{13}+b$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$, sono irrazionali.	Scrivere qui la risoluzione dell'esercizio se lo spazio è sufficiente Supponiamo per assurdo che $a\sqrt{13}+b$ sia razionale, cioè che $a\sqrt{13}+b = r \in \mathbb{Q}$. Allora si avrebbe che $$\sqrt{3} = \frac{r-b}{a} \in \mathbb{Q}$$ perché r, b e a sono razionali, e la differenza e il prodotto di razionali sono razionali. Ciò è in contraddizione con il fatto che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

2. Risolvere la disequazione $$8^{(x+2)} > 2^{\lvert 3x-1 \rvert}$$	L'insieme delle soluzioni della disequazione è $S =]-\frac{5}{6}, +\infty[$

3. Dimostrare che la seguente equazione $$e^x \sqrt{x-1} = 1$$ ha un'unica soluzione reale x_0 e calcolarne un valore approssimato con un errore inferiore a $1/8$ senza fare uso del calcolatore.	Un valore approssimato della soluzione, con l'approssimazione richiesta è $x_0 \simeq \frac{9}{8}$

4. Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(1+\log x)}{\log x}$$

Il limite esiste

Il limite vale: 1

5. Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$$

con legge

$$f(x) = \begin{cases} 6-x & \text{se } x < 1 \\ a/x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.

1. Determinare per quali valori di a, se ne esistono, la funzione è continua in ogni punto del dominio;
2. dire per quali valori di a la funzione è invertibile;
3. dire se per $a = 2$ la funzione è invertibile e, in caso affermativo, determinare dominio, codominio e legge della funzione inversa e tracciarne un grafico approssimativo.

1. $a = 5$
2. I valori di a per i quali la funzione è invertibile sono: $a \leq 5$, $a \neq 0$
3. Per $a = 2$ la funzione è/non è invertibile. Nel caso in cui risulti invertibile, la funzione inversa ha dominio $A =]0,2] \cup]5,+\infty[$

   codominio $B = \mathbb{R}$

   e la seguente legge

   $$f^{-1}(y) = \begin{cases} 6-y & \text{se } y > 5 \\ 2/y & \text{se } 0 < y \leq 2 \end{cases}$$

   e il seguente grafico approssimativo: