Università degli Studi di Udine

Tesi di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica

PROPRIETÀ STRUTTURALI DI SISTEMI BIOCHIMICI

Relatore:
Chiar.mo Prof. Franco Blanchini
Correlatrice:
Chiar.ma Prof.ssa Elisa Franco

Laureanda:
Giulia Giordano

22 ottobre 2012

La teoria dei sistemi: applicazioni in biologia

Biologia dei sistemi

- **Cosa:** analisi di sistemi biochimici **naturali**
- **Perché:** comprenderne le dinamiche

Biologia sintetica

- **Cosa:** progetto di sistemi biochimici **artificiali**
- **Perché:** sviluppare biotecnologie e terapie innovative

Come?

- approccio **interdisciplinare** e **quantitativo**
- **modelli matematici** accurati e affidabili

Teoria dei sistemi e del controllo → investigare **proprietà dinamiche** e **robustezza** delle reti biochimiche

La teoria dei sistemi: applicazioni in biologia

Biologia dei sistemi

- **Cosa:** analisi di sistemi biochimici **naturali**
- **Perché:** comprenderne le dinamiche

Biologia sintetica

- **Cosa:** progetto di sistemi biochimici **artificiali**
- **Perché:** sviluppare biotecnologie e terapie innovative

Come?

- approccio **interdisciplinare** e **quantitativo**
- **modelli matematici** accurati e affidabili

Teoria dei sistemi e del controllo → investigare **proprietà dinamiche** e **robustezza** delle reti biochimiche

La teoria dei sistemi: applicazioni in biologia

Biologia dei sistemi

- **Cosa:** analisi di sistemi biochimici **naturali**
- **Perché:** comprenderne le dinamiche

Biologia sintetica

- **Cosa:** progetto di sistemi biochimici **artificiali**
- **Perché:** sviluppare biotecnologie e terapie innovative

Come?

- approccio **interdisciplinare** e **quantitativo**
- **modelli matematici** accurati e affidabili

Teoria dei sistemi e del controllo $\rightarrow$ investigare **proprietà dinamiche** e **robustezza** delle reti biochimiche

La teoria dei sistemi: applicazioni in biologia

Biologia dei sistemi

- **Cosa:** analisi di sistemi biochimici **naturali**
- **Perché:** comprenderne le dinamiche

Biologia sintetica

- **Cosa:** progetto di sistemi biochimici **artificiali**
- **Perché:** sviluppare biotecnologie e terapie innovative

Come?

- approccio **interdisciplinare** e **quantitativo**
- **modelli matematici** accurati e affidabili

Teoria dei sistemi e del controllo → investigare **proprietà dinamiche** e **robustezza** delle reti biochimiche

La teoria dei sistemi: applicazioni in biologia

Biologia dei sistemi

- **Cosa:** analisi di sistemi biochimici **naturali**
- **Perché:** comprenderne le dinamiche

Biologia sintetica

- **Cosa:** progetto di sistemi biochimici **artificiali**
- **Perché:** sviluppare biotecnologie e terapie innovative

Come?

- approccio **interdisciplinare** e **quantitativo**
- **modelli matematici** accurati e affidabili

Teoria dei sistemi e del controllo $\rightarrow$ investigare **proprietà dinamiche** e **robustezza** delle reti biochimiche

La teoria dei sistemi: applicazioni in biologia

Biologia dei sistemi

- **Cosa:** analisi di sistemi biochimici **naturali**
- **Perché:** comprenderne le dinamiche

Biologia sintetica

- **Cosa:** progetto di sistemi biochimici **artificiali**
- **Perché:** sviluppare biotecnologie e terapie innovative

Come?

- approccio **interdisciplinare** e **quantitativo**
- **modelli matematici** accurati e affidabili

Teoria dei sistemi e del controllo $\rightarrow$ investigare **proprietà dinamiche** e **robustezza** delle reti biochimiche

La teoria dei sistemi: applicazioni in biologia

Biologia dei sistemi

- **Cosa:** analisi di sistemi biochimici **naturali**
- **Perché:** comprenderne le dinamiche

Biologia sintetica

- **Cosa:** progetto di sistemi biochimici **artificiali**
- **Perché:** sviluppare biotecnologie e terapie innovative

Come?

- approccio **interdisciplinare** e **quantitativo**
- **modelli matematici** accurati e affidabili

Teoria dei sistemi e del controllo → investigare **proprietà dinamiche** e **robustezza** delle reti biochimiche

Proprietà strutturali: perché

Ostacolo: variabilità **intrinseca** dei sistemi biochimici
$\rightarrow$ spesso impossibile conoscere parametri e funzioni

Soluzione: analisi strutturale

Proprietà strutturale

La proprietà $\mathscr{P}$ è una **proprietà strutturale** rispetto alla famiglia di sistemi $\mathscr{F}$ se ogni sistema appartenente a $\mathscr{F}$ gode della proprietà $\mathscr{P}$.

Proprietà strutturali: perché

Ostacolo: **variabilità intrinseca** dei sistemi biochimici
$\rightarrow$ spesso impossibile conoscere parametri e funzioni

Soluzione: analisi strutturale

Proprietà strutturale

La proprietà $\mathscr{P}$ è una **proprietà strutturale** rispetto alla famiglia di sistemi $\mathscr{F}$ se ogni sistema appartenente a $\mathscr{F}$ gode della proprietà $\mathscr{P}$.

Proprietà strutturali: perché

Ostacolo: **variabilità intrinseca** dei sistemi biochimici
$\rightarrow$ spesso impossibile conoscere parametri e funzioni

Soluzione: **analisi strutturale**

Proprietà strutturale

La proprietà $\mathscr{P}$ è una **proprietà strutturale** rispetto alla famiglia di sistemi $\mathscr{F}$ se ogni sistema appartenente a $\mathscr{F}$ gode della proprietà $\mathscr{P}$.

Proprietà strutturali: perché

Ostacolo: **variabilità intrinseca** dei sistemi biochimici
$\rightarrow$ spesso impossibile conoscere parametri e funzioni

Soluzione: **analisi strutturale**

Proprietà strutturale

La proprietà $\mathscr{P}$ è una **proprietà strutturale** rispetto alla famiglia di sistemi $\mathscr{F}$ se ogni sistema appartenente a $\mathscr{F}$ gode della proprietà $\mathscr{P}$.

Esempio: sistema strutturalmente stabile

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} \emptyset,$$

equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3) \\ \dot{x}_2 &= g_1(x_1) - g_2(x_2) \\ \dot{x}_3 &= g_2(x_2) - g_3(x_3) - g_{13}(x_1,x_3) \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3}$, $\varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}$ positivi,

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\varepsilon) & 0 & -\delta \\ \alpha & -\beta & 0 \\ -\varepsilon & \beta & -(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

irriducibilmente diagonale dominante

Esempio: sistema strutturalmente stabile

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} \emptyset,$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3) - g_{13}(x_1,x_3)$$

$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3}$, $\varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}$ positivi,

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\varepsilon) & 0 & -\delta \\ \alpha & -\beta & 0 \\ -\varepsilon & \beta & -(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

irriducibilmente diagonale dominante

Esempio: sistema strutturalmente stabile

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} \emptyset,$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3) - g_{13}(x_1,x_3)$$

$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3}$, $\varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}$ positivi,

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\varepsilon) & 0 & -\delta \\ \alpha & -\beta & 0 \\ -\varepsilon & \beta & -(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

irriducibilmente diagonale dominante

Esempio: sistema strutturalmente stabile

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} \emptyset,$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3) - g_{13}(x_1,x_3)$$

$$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1},\ \beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2},\ \gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3},\ \delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3},\ \varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1} \text{ positivi,}$$

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\varepsilon) & 0 & -\delta \\ \alpha & -\beta & 0 \\ -\varepsilon & \beta & -(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

irriducibilmente diagonale dominante

Esempio: sistema strutturalmente stabile

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} \emptyset,$$

equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3) \\ \dot{x}_2 &= g_1(x_1) - g_2(x_2) \\ \dot{x}_3 &= g_2(x_2) - g_3(x_3) - g_{13}(x_1,x_3) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1},\ \beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2},\ \gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3},\ \delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3},\ \varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}\ \text{positivi,}$$

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\varepsilon) & 0 & -\delta \\ \alpha & -\beta & 0 \\ -\varepsilon & \beta & -(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

irriducibilmente diagonale dominante

Esempio: sistema strutturalmente stabile

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} \emptyset,$$

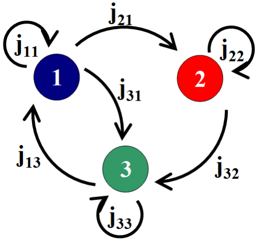
equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3) - g_{13}(x_1,x_3)$$

$$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1},\ \beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2},\ \gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3},\ \delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3},\ \varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}\ \text{positivi},$$

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\varepsilon) & 0 & -\delta \\ \alpha & -\beta & 0 \\ -\varepsilon & \beta & -(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

irriducibilmente diagonale dominante



Esempio: sistema strutturalmente stabile

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} \emptyset,$$

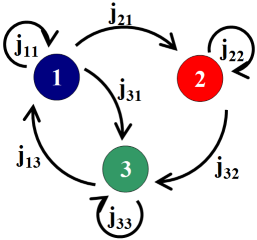
equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)\\ \dot{x}_2 &= g_1(x_1) - g_2(x_2)\\ \dot{x}_3 &= g_2(x_2) - g_3(x_3) - g_{13}(x_1,x_3)\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3}$, $\varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}$ positivi,

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\varepsilon) & 0 & -\delta \\ \alpha & -\beta & 0 \\ -\varepsilon & \beta & -(\gamma+\delta) \end{bmatrix}$$

irriducibilmente diagonale dominante



Struttura della tesi

- Introduzione ai **sistemi biochimici**, loro caratteristiche e comportamenti ricorrenti
- Criteri **strutturali** per riconoscere sistemi
  1. **potenziali oscillatori**
  2. **con adattamento perfetto**
  3. **monotoni** rispetto all'ordine parziale indotto da un cono
- **Algoritmi** di riconoscimento **implementati numericamente** e applicati in molteplici esempi di sistemi biochimici

Struttura della tesi

- Introduzione ai **sistemi biochimici**, loro caratteristiche e comportamenti ricorrenti
- Criteri **strutturali** per riconoscere sistemi
  1. **potenziali oscillatori**
  2. **con adattamento perfetto**
  3. **monotoni** rispetto all'ordine parziale indotto da un cono
- **Algoritmi** di riconoscimento **implementati numericamente** e applicati in molteplici esempi di sistemi biochimici

Struttura della tesi

- Introduzione ai **sistemi biochimici**, loro caratteristiche e comportamenti ricorrenti
- Criteri **strutturali** per riconoscere sistemi
  1. **potenziali oscillatori**
  2. **con adattamento perfetto**
  3. **monotoni** rispetto all'ordine parziale indotto da un cono
- **Algoritmi** di riconoscimento **implementati numericamente** e applicati in molteplici esempi di sistemi biochimici

Struttura della tesi

- Introduzione ai **sistemi biochimici**, loro caratteristiche e comportamenti ricorrenti
- Criteri **strutturali** per riconoscere sistemi
  1. **potenziali oscillatori**
  2. **con adattamento perfetto**
  3. **monotoni** rispetto all'ordine parziale indotto da un cono
- **Algoritmi** di riconoscimento **implementati numericamente** e applicati in molteplici esempi di sistemi biochimici

Struttura della tesi

- Introduzione ai **sistemi biochimici**, loro caratteristiche e comportamenti ricorrenti
- Criteri **strutturali** per riconoscere sistemi
  1. **potenziali oscillatori**
  2. **con adattamento perfetto**
  3. **monotoni** rispetto all'ordine parziale indotto da un cono
- **Algoritmi** di riconoscimento **implementati numericamente** e applicati in molteplici esempi di sistemi biochimici

Struttura della tesi

- Introduzione ai **sistemi biochimici**, loro caratteristiche e comportamenti ricorrenti
- Criteri **strutturali** per riconoscere sistemi
  1. **potenziali oscillatori**
  2. **con adattamento perfetto**
  3. **monotoni** rispetto all'ordine parziale indotto da un cono
- **Algoritmi** di riconoscimento **implementati numericamente** e applicati in molteplici esempi di sistemi biochimici

Classe di modelli considerati

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ concentrazioni di specie chimiche
- u vettore costante di flussi entranti
- $g(x) \in \mathbb{R}^m$ vettore di funzioni positive, monotone crescenti
- $S \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ matrice *stechiometrica* del sistema
- matrice V contributo dei flussi costanti
- soluzioni del sistema globalmente limitate

Classe di modelli considerati

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ concentrazioni di specie chimiche
- u vettore costante di flussi entranti
- $g(x) \in \mathbb{R}^m$ vettore di funzioni positive, monotone crescenti
- $S \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ matrice *stechiometrica* del sistema
- matrice V contributo dei flussi costanti
- soluzioni del sistema globalmente limitate

Classe di modelli considerati

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ concentrazioni di specie chimiche
- u vettore costante di flussi entranti
- $g(x) \in \mathbb{R}^m$ vettore di funzioni positive, monotone crescenti
- $S \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ matrice *stechiometrica* del sistema
- matrice V contributo dei flussi costanti
- soluzioni del sistema globalmente limitate

Classe di modelli considerati

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ concentrazioni di specie chimiche
- u vettore costante di flussi entranti
- $g(x) \in \mathbb{R}^m$ vettore di funzioni positive, monotone crescenti
- $S \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ matrice *stechiometrica* del sistema
- matrice V contributo dei flussi costanti
- soluzioni del sistema globalmente limitate

Classe di modelli considerati

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ concentrazioni di specie chimiche
- u vettore costante di flussi entranti
- $g(x) \in \mathbb{R}^m$ vettore di funzioni positive, monotone crescenti
- $S \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ matrice *stechiometrica* del sistema
- matrice V contributo dei flussi costanti
- soluzioni del sistema globalmente limitate

Classe di modelli considerati

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ concentrazioni di specie chimiche
- u vettore costante di flussi entranti
- $g(x) \in \mathbb{R}^m$ vettore di funzioni positive, monotone crescenti
- $S \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ matrice *stechiometrica* del sistema
- matrice V contributo dei flussi costanti
- soluzioni del sistema globalmente limitate

Classe di modelli considerati

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^n_+$ concentrazioni di specie chimiche
- u vettore costante di flussi entranti
- $g(x) \in \mathbb{R}^m$ vettore di funzioni positive, monotone crescenti
- $S \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ matrice *stechiometrica* del sistema
- matrice V contributo dei flussi costanti
- soluzioni del sistema globalmente limitate

Struttura della matrice Jacobiana

$$J = B\,D\,C = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Col}_k^B \mathrm{Row}_k^C d_k = \sum_{k=1}^{q} M_k d_k,\ d_k > 0$$

$D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_k, \ldots, d_q\}$ contiene tutte le possibili derivate parziali non nulle, assunte positive

$$\mathrm{rank}[M_k] = 1 \qquad \forall k$$

$\rightarrow$ funzione **multiaffine**

Struttura della matrice Jacobiana

$$J = B\,D\,C = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Col}_k^B \mathrm{Row}_k^C d_k = \sum_{k=1}^{q} M_k d_k,\ d_k > 0$$

$D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_k, \ldots, d_q\}$ contiene tutte le possibili derivate parziali non nulle, assunte positive

$$\mathrm{rank}[M_k] = 1 \qquad \forall k$$

$\rightarrow$ funzione **multiaffine**

Struttura della matrice Jacobiana

$$J = B\,D\,C = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Col}_k^B \mathrm{Row}_k^C d_k = \sum_{k=1}^{q} M_k d_k,\; d_k > 0$$

$D = \mathrm{diag}\{d_1, \dots, d_k, \dots, d_q\}$ contiene tutte le possibili derivate parziali non nulle, assunte positive

$$\mathrm{rank}[M_k] = 1 \qquad \forall k$$

$\rightarrow$ funzione **multiaffine**

Struttura della matrice Jacobiana

$$J = B\,D\,C = \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Col}_k^B \mathrm{Row}_k^C d_k = \sum_{k=1}^{q} M_k d_k,\ d_k > 0$$

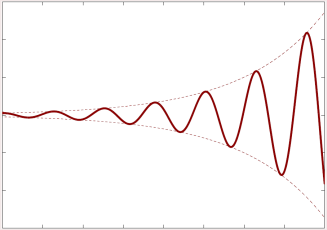
$D = \mathrm{diag}\{d_1, \dots, d_k, \dots, d_q\}$ contiene tutte le possibili derivate parziali non nulle, assunte positive

$$\mathrm{rank}[M_k] = 1 \qquad \forall k$$

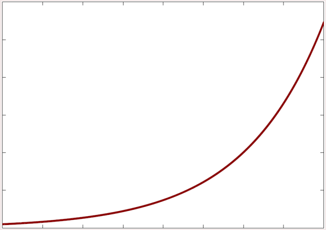
$\rightarrow$ funzione **multiaffine**

Riconoscere strutturalmente potenziali oscillatori I

Potenziale oscillatore



solo instabilità **oscillatoria**



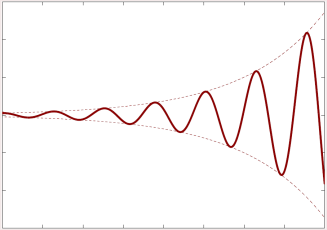
mai instabilità **esponenziale**

L'instabilità esponenziale è esclusa se

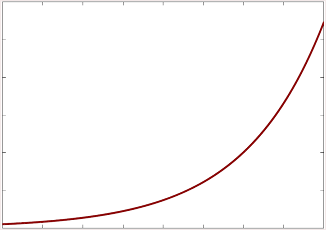
$$\det\left(\lambda I - \sum_{k=1}^{q} M_k d_k\right) \neq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Riconoscere strutturalmente potenziali oscillatori I

Potenziale oscillatore



solo instabilità **oscillatoria**



mai instabilità **esponenziale**

L'instabilità esponenziale è esclusa se

$$\det\left(\lambda I - \sum_{k=1}^{q} M_k d_k\right) \neq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Riconoscere strutturalmente potenziali oscillatori II

$$f(\bar{d}) = \det\left(I - \sum_{k=1}^{q} M_k \bar{d}_k\right) \neq 0, \quad 0 < \bar{d}_k \leq \Theta$$

Proposizione - Criterio per potenziali oscillatori

$f(\bar{d})$ non nulla in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : 0 < \bar{d}_k \leq \Theta\} \Leftrightarrow f(\bar{d})$ positiva per ogni vertice di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$. Dunque il sistema può esibire dinamiche instabili solo oscillatorie.

Semplice verifica **numerica**

Riconoscere strutturalmente potenziali oscillatori II

$$f(\bar{d}) = \det\left(I - \sum_{k=1}^{q} M_k \bar{d}_k\right) \neq 0, \quad 0 < \bar{d}_k \leq \Theta$$

Proposizione - Criterio per potenziali oscillatori

$f(\bar{d})$ non nulla in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : 0 < \bar{d}_k \leq \Theta\} \Leftrightarrow f(\bar{d})$ positiva per ogni vertice di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$. Dunque il sistema può esibire dinamiche instabili solo oscillatorie.

Semplice verifica **numerica**

Riconoscere strutturalmente potenziali oscillatori II

$$f(\bar{d}) = \det\left(I - \sum_{k=1}^{q} M_k \bar{d}_k\right) \neq 0, \quad 0 < \bar{d}_k \leq \Theta$$

Proposizione - Criterio per potenziali oscillatori

$f(\bar{d})$ non nulla in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : 0 < \bar{d}_k \leq \Theta\} \Leftrightarrow f(\bar{d})$ positiva per ogni vertice di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$. Dunque il sistema può esibire dinamiche instabili solo oscillatorie.

Semplice verifica **numerica**

Esempio: sistema strutturalmente potenziale oscillatore

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$

$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$

$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} X_3$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3)$$

$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3}$, $\varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}$ positivi,

$$f(\bar{d}) = \det \begin{bmatrix} 1+(\alpha+\varepsilon) & 0 & \delta \\ -\alpha & 1+\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

positiva su tutti i vertici

Esempio: sistema strutturalmente potenziale oscillatore

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$

$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$

$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} X_3$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1, x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3)$$

$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3}$, $\varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}$ positivi,

$$f(\bar{d}) = \det \begin{bmatrix} 1+(\alpha+\varepsilon) & 0 & \delta \\ -\alpha & 1+\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

positiva su tutti i vertici

Esempio: sistema strutturalmente potenziale oscillatore

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} X_3$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3)$$

$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3}$, $\varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}$ positivi,

$$f(\bar{d}) = \det \begin{bmatrix} 1+(\alpha+\varepsilon) & 0 & \delta \\ -\alpha & 1+\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

positiva su tutti i vertici

Esempio: sistema strutturalmente potenziale oscillatore

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} X_3$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3)$$

$$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1},\ \beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2},\ \gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3},\ \delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3},\ \varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}\ \text{positivi,}$$

$$f(\bar{d}) = \det \begin{bmatrix} 1+(\alpha+\varepsilon) & 0 & \delta \\ -\alpha & 1+\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

positiva su tutti i vertici

Esempio: sistema strutturalmente potenziale oscillatore

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} X_3$$

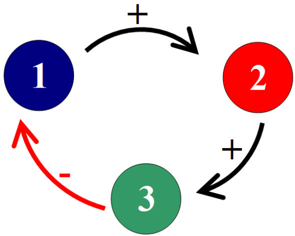
equazioni differenziali

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)\\
\dot{x}_2 &= g_1(x_1) - g_2(x_2)\\
\dot{x}_3 &= g_2(x_2) - g_3(x_3)
\end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1},\ \beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2},\ \gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3},\ \delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3},\ \varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}\ \text{positivi},$$

$$f(\bar{d}) = \det \begin{bmatrix} 1+(\alpha+\varepsilon) & 0 & \delta \\ -\alpha & 1+\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

positiva su tutti i vertici



Esempio: sistema strutturalmente potenziale oscillatore

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} X_2,$$
$$X_2 \xrightarrow{g_2(x_2)} X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} \emptyset,$$
$$X_1 + X_3 \xrightarrow{g_{13}(x_1,x_3)} X_3$$

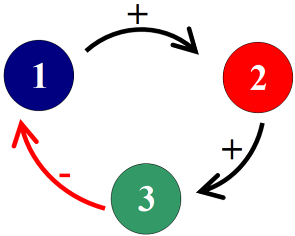
equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_1(x_1) - g_{13}(x_1,x_3)$$
$$\dot{x}_2 = g_1(x_1) - g_2(x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_2(x_2) - g_3(x_3)$$

$$\alpha = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1},\ \beta = \frac{\partial g_2(x_2)}{\partial x_2},\ \gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3},\ \delta = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_3},\ \varepsilon = \frac{\partial g_{13}(x_1,x_3)}{\partial x_1}\ \text{positivi,}$$

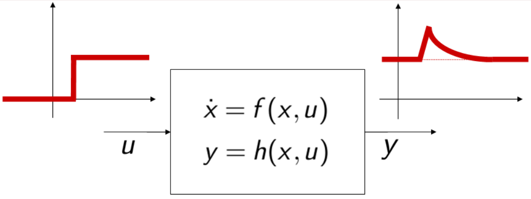
$$f(\bar{d}) = \det \begin{bmatrix} 1+(\alpha+\varepsilon) & 0 & \delta \\ -\alpha & 1+\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 1+\gamma \end{bmatrix}$$

positiva su tutti i vertici



Riconoscere strutturalmente sistemi perfettam. adattativi I

Sistema con adattamento perfetto



Sistema

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$
$$y = Nx + Du$$

Linearizzazione, $z = x - \bar{x}$, $v = u - \bar{u}$

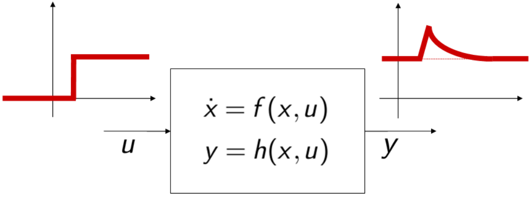
$$\dot{z} = Jz + Vv,$$
$$w = Nz + Dv.$$

Si ha adattamento perfetto se

$$\det \begin{bmatrix} J & V \\ N & D \end{bmatrix} = \det H = 0.$$

Riconoscere strutturalmente sistemi perfettam. adattativi I

Sistema con adattamento perfetto



Sistema

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$
$$y = Nx + Du$$

Linearizzazione, $z = x - \bar{x}$, $v = u - \bar{u}$

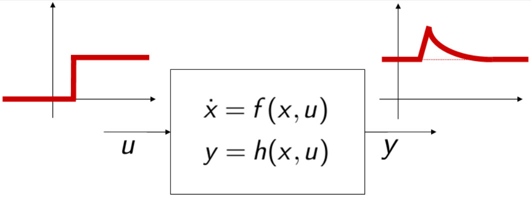
$$\dot{z} = Jz + Vv,$$
$$w = Nz + Dv.$$

Si ha adattamento perfetto se

$$\det \begin{bmatrix} J & V \\ N & D \end{bmatrix} = \det H = 0.$$

Riconoscere strutturalmente sistemi perfettam. adattativi I

Sistema con adattamento perfetto



Sistema

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$
$$y = Nx + Du$$

Linearizzazione, $z = x - \bar{x}$, $v = u - \bar{u}$

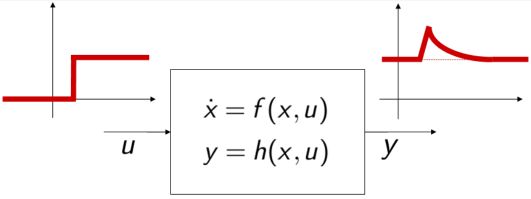
$$\dot{z} = Jz + Vv,$$
$$w = Nz + Dv.$$

Si ha adattamento perfetto se

$$\det \begin{bmatrix} J & V \\ N & D \end{bmatrix} = \det H = 0.$$

Riconoscere strutturalmente sistemi perfettam. adattativi I

Sistema con adattamento perfetto



Sistema

$$\dot{x} = Sg(x) + Vu$$
$$y = Nx + Du$$

Linearizzazione, $z = x - \bar{x}$, $v = u - \bar{u}$

$$\dot{z} = Jz + Vv,$$
$$w = Nz + Dv.$$

Si ha adattamento perfetto se

$$\det \begin{bmatrix} J & V \\ N & D \end{bmatrix} = \det H = 0.$$

Riconoscere strutturalmente sistemi perfettam. adattativi II

Proposizione - Criterio per sistemi perfettamente adattativi

$f(\bar{d}) = \det H$ identicamente zero in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : 0 \leq \bar{d}_k \leq 1\}$ $\Leftrightarrow$ zero in ogni vertice di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$.

Evitare cancellazioni zero–polo $\rightarrow \det J \neq 0$.

Condizione sul determinante Jacobiano

$f(\bar{d}) = \det J$ non nulla in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : \varepsilon \leq \bar{d}_k \leq 1\}$ $\Leftrightarrow$ ha lo stesso segno su tutti i vertici di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$.

Semplice verifica **numerica**

Riconoscere strutturalmente sistemi perfettam. adattativi II

Proposizione - Criterio per sistemi perfettamente adattativi

$f(\bar{d}) = \det H$ identicamente zero in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : 0 \leq \bar{d}_k \leq 1\} \Leftrightarrow$ zero in ogni vertice di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$.

Evitare cancellazioni zero–polo $\rightarrow \det J \neq 0$.

Condizione sul determinante Jacobiano

$f(\bar{d}) = \det J$ non nulla in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : \varepsilon \leq \bar{d}_k \leq 1\} \Leftrightarrow$ ha lo stesso segno su tutti i vertici di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$.

Semplice verifica **numerica**

Riconoscere strutturalmente sistemi perfettam. adattativi II

Proposizione - Criterio per sistemi perfettamente adattativi

$f(\bar{d}) = \det H$ identicamente zero in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : 0 \leq \bar{d}_k \leq 1\} \Leftrightarrow$ zero in ogni vertice di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$.

Evitare cancellazioni zero–polo $\rightarrow \det J \neq 0$.

Condizione sul determinante Jacobiano

$f(\bar{d}) = \det J$ non nulla in $\mathscr{C}_{\bar{d}} = \{\bar{d}_k : \varepsilon \leq \bar{d}_k \leq 1\} \Leftrightarrow$ ha lo stesso segno su tutti i vertici di $\mathscr{C}_{\bar{d}}$.

Semplice verifica **numerica**

Esempio: sistema perfettamente adattativo

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1, \emptyset \xrightarrow{u_2} X_2$$

$$X_1 + X_2 \xrightarrow{g_{12}(x_1,x_2)} X_3$$

$$X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} \emptyset$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_{12}(x_1,x_2) + g_3(x_3) - g_1(x_1)$$
$$\dot{x}_2 = u_2 - g_{12}(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_{12}(x_1,x_2) - g_3(x_3).$$

$\alpha = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\eta = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ positivi

Perturbazioni sull'ingresso u_1, uscita x_3

$$\det J = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det H = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma & 1 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esempio: sistema perfettamente adattativo

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1, \emptyset \xrightarrow{u_2} X_2$$

$$X_1 + X_2 \xrightarrow{g_{12}(x_1,x_2)} X_3$$

$$X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} \emptyset$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_{12}(x_1,x_2) + g_3(x_3) - g_1(x_1)$$
$$\dot{x}_2 = u_2 - g_{12}(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_{12}(x_1,x_2) - g_3(x_3).$$

$\alpha = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\eta = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ positivi

Perturbazioni sull'ingresso u_1, uscita x_3

$$\det J = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det H = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma & 1 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esempio: sistema perfettamente adattativo

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1, \emptyset \xrightarrow{u_2} X_2$$

$$X_1 + X_2 \xrightarrow{g_{12}(x_1,x_2)} X_3$$

$$X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} \emptyset$$

equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 - g_{12}(x_1,x_2) + g_3(x_3) - g_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= u_2 - g_{12}(x_1,x_2) \\ \dot{x}_3 &= g_{12}(x_1,x_2) - g_3(x_3). \end{aligned}$$

$\alpha = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\eta = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ positivi

Perturbazioni sull'ingresso u_1, uscita x_3

$$\det J = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det H = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma & 1 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esempio: sistema perfettamente adattativo

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1, \emptyset \xrightarrow{u_2} X_2$$
$$X_1 + X_2 \xrightarrow{g_{12}(x_1,x_2)} X_3$$
$$X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} \emptyset$$

equazioni differenziali

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 - g_{12}(x_1,x_2) + g_3(x_3) - g_1(x_1)\\ \dot{x}_2 &= u_2 - g_{12}(x_1,x_2)\\ \dot{x}_3 &= g_{12}(x_1,x_2) - g_3(x_3).\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\eta = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ positivi

Perturbazioni sull'ingresso u_1, uscita x_3

$$\det J = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det H = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma & 1 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esempio: sistema perfettamente adattativo

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1, \emptyset \xrightarrow{u_2} X_2$$
$$X_1 + X_2 \xrightarrow{g_{12}(x_1,x_2)} X_3$$
$$X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} \emptyset$$

equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 - g_{12}(x_1,x_2) + g_3(x_3) - g_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= u_2 - g_{12}(x_1,x_2) \\ \dot{x}_3 &= g_{12}(x_1,x_2) - g_3(x_3). \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1},\ \beta = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2},\ \gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3},\ \eta = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1} \text{ positivi}$$

Perturbazioni sull'ingresso u_1, uscita x_3

$$\det J = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det H = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma & 1 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esempio: sistema perfettamente adattativo

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1, \emptyset \xrightarrow{u_2} X_2$$
$$X_1 + X_2 \xrightarrow{g_{12}(x_1,x_2)} X_3$$
$$X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} \emptyset$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_{12}(x_1,x_2) + g_3(x_3) - g_1(x_1)$$
$$\dot{x}_2 = u_2 - g_{12}(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_3 = g_{12}(x_1,x_2) - g_3(x_3).$$

$\alpha = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\eta = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ positivi

Perturbazioni sull'ingresso u_1, uscita x_3

$$\det J = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det H = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma & 1 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esempio: sistema perfettamente adattativo

Reazioni chimiche

$$\emptyset \xrightarrow{u_1} X_1, \emptyset \xrightarrow{u_2} X_2$$

$$X_1 + X_2 \xrightarrow{g_{12}(x_1,x_2)} X_3$$

$$X_3 \xrightarrow{g_3(x_3)} X_1 \xrightarrow{g_1(x_1)} \emptyset$$

equazioni differenziali

$$\dot{x}_1 = u_1 - g_{12}(x_1,x_2) + g_3(x_3) - g_1(x_1)$$

$$\dot{x}_2 = u_2 - g_{12}(x_1,x_2)$$

$$\dot{x}_3 = g_{12}(x_1,x_2) - g_3(x_3).$$

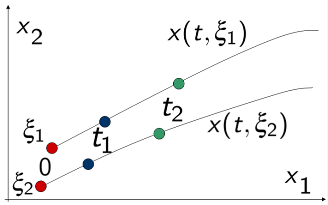
$\alpha = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, $\beta = \frac{\partial g_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $\gamma = \frac{\partial g_3(x_3)}{\partial x_3}$, $\eta = \frac{\partial g_1(x_1)}{\partial x_1}$ positivi

Perturbazioni sull'ingresso u_1, uscita x_3

$$\det J = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma \\ -\alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{bmatrix} \neq 0 \qquad \det H = \det \begin{bmatrix} -\alpha-\eta & -\beta & \gamma & 1 \\ -\alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Riconoscere sistemi strutturalmente monotoni

Sistema monotono



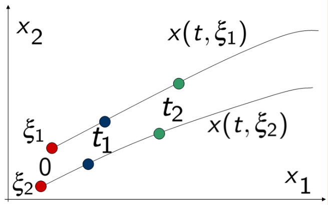
$$\xi_1 \geq \xi_2 \Rightarrow x(t, \xi_1) \geq x(t, \xi_2) \forall t \geq 0$$

Riconoscimento non immediato di sistema monotono $\rightarrow$ necessaria opportuna trasformazione di stato $\rightarrow$ T matrice quadrata invertibile

$J = B\,D\,C \rightarrow T$ composta da colonne di B

Riconoscere sistemi strutturalmente monotoni

Sistema monotono



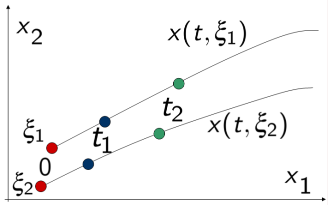
$$\xi_1 \geq \xi_2 \Rightarrow x(t,\xi_1) \geq x(t,\xi_2) \forall t \geq 0$$

Riconoscimento non immediato di sistema monotono $\rightarrow$ necessaria opportuna trasformazione di stato $\rightarrow$ T matrice quadrata invertibile

$J = B\,D\,C \rightarrow T$ composta da colonne di B

Riconoscere sistemi strutturalmente monotoni

Sistema monotono



$$\xi_1 \geq \xi_2 \Rightarrow x(t,\xi_1) \geq x(t,\xi_2) \forall t \geq 0$$

Riconoscimento non immediato di sistema monotono $\rightarrow$ necessaria opportuna trasformazione di stato $\rightarrow$ T matrice quadrata invertibile

$J = B\,D\,C$ $\rightarrow$ T composta da colonne di B

Esempio: sistema strutturalmente monotono

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\beta) & -\gamma & \delta \\ \varepsilon-\beta & -(\varepsilon+\gamma) & 0 \\ \alpha & 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$

scegliendo opportunamente 3 colonne di B per formare la matrice

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

si riconduce a

$$\hat{J} = T^{-1} J T = \begin{bmatrix} -(\gamma+\beta) & \beta & \gamma \\ \alpha & -(\alpha+\delta) & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix},$$

che è **di Metzler**.

Esempio: sistema strutturalmente monotono

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\beta) & -\gamma & \delta \\ \varepsilon-\beta & -(\varepsilon+\gamma) & 0 \\ \alpha & 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$

scegliendo opportunamente 3 colonne di B per formare la matrice

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

si riconduce a

$$\hat{J} = T^{-1} J T = \begin{bmatrix} -(\gamma+\beta) & \beta & \gamma \\ \alpha & -(\alpha+\delta) & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix},$$

che è **di Metzler**.

Esempio: sistema strutturalmente monotono

$$J = \begin{bmatrix} -(\alpha+\beta) & -\gamma & \delta \\ \varepsilon-\beta & -(\varepsilon+\gamma) & 0 \\ \alpha & 0 & -\delta \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon > 0$

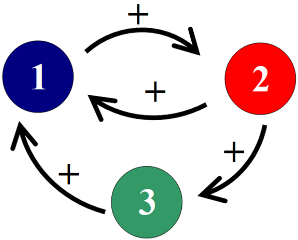
scegliendo opportunamente 3 colonne di B per formare la matrice

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

si riconduce a

$$\hat{J} = T^{-1} J T = \begin{bmatrix} -(\gamma+\beta) & \beta & \gamma \\ \alpha & -(\alpha+\delta) & 0 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix},$$

che è **di Metzler**.



Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici $\rightarrow$ ricerca di proprietà **strutturali** $\rightarrow$ prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici → ricerca di proprietà **strutturali** → prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici $\rightarrow$ ricerca di proprietà **strutturali** $\rightarrow$ prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici $\rightarrow$ ricerca di proprietà **strutturali** $\rightarrow$ prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici → ricerca di proprietà **strutturali** → prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici $\rightarrow$ ricerca di proprietà **strutturali** $\rightarrow$ prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici $\rightarrow$ ricerca di proprietà **strutturali** $\rightarrow$ prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici $\rightarrow$ ricerca di proprietà **strutturali** $\rightarrow$ prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili

Conclusioni

Incertezze intrinseche nei sistemi biologici $\rightarrow$ ricerca di proprietà **strutturali** $\rightarrow$ prescindere da precisi valori dei parametri o esatta realizzazione delle funzioni

I criteri ottenuti sono

- **generali**, indipendenti da incertezze
- basati su **solidi** metodi di teoria del controllo
- **semplici**: analisi della matrice Jacobiana del sistema
- di **facile** implementazione numerica

Possibili sviluppi: criteri necessari e sufficienti per il riconoscimento strutturale di sistemi stabili