

# La logica infinito-valente di Łukasiewicz

Giovanni Panti

Tesi di Dottorato

DOTTORATO DI RICERCA IN  
LOGICA MATEMATICA E INFORMATICA TEORICA  
VI CICLO  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SIENA  
1995

Vorrei ringraziare tutte le persone che mi hanno insegnato qualcosa.

In matematica, il mio più grande debito è nei confronti del mio supervisore, Daniele Mundici. Durante gli ultimi quattro anni la sua apertura mentale, il suo entusiasmo, e il suo vasto campo di interessi, mi hanno consentito di entrare in contatto con vari campi della ricerca, e di apprezzarne la bellezza e l'unità.

Ringrazio di cuore Franco Montagna, per il suo costante incoraggiamento e aiuto anche pratico, fin dal tempo della mia tesi di laurea. Alessandro Berarducci, Sy Friedman, Angus Macintyre, Alasdair Urquhart, John Wilker, mi hanno mostrato, in varie occasioni, facce della ricerca matematica. Serge Lang, che non ho mai conosciuto, mi ha dato qualcosa attraverso i suoi libri.

Al di là della matematica, molte persone sono state importanti per me. Posso ricordare solo quelle che mi stanno più vicine: Alessandra, Andrea, Annamaria, Cecilia, Federica, Federica, Filippo, Lorenzo, Vito, mio padre e mia madre. A tutti loro, grazie.

Siena, gennaio 1995



## Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
Notazione . . . . .	2
<b>1 Nozioni di base</b>	<b>3</b>
<b>2 Il teorema di completezza</b>	<b>9</b>
2.1 Partizioni dell' $n$ -cubo . . . . .	15
2.2 Cappelli di Schauder . . . . .	20
2.3 Il teorema di completezza e il teorema di McNaughton . . . . .	30
<b>3 Relazioni con gruppi abeliani reticolari</b>	<b>33</b>
3.1 Gruppi di Riesz . . . . .	35
3.2 Ideali delle MV-algebre . . . . .	39
3.3 MV-algebre libere . . . . .	44
<b>4 Relazioni con AF <math>C^*</math>-algebre</b>	<b>53</b>
4.1 Classificazione delle AF $C^*$ -algebre il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare . . . . .	55
4.2 Diagrammi di Bratteli . . . . .	62
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>71</b>



Fui io già di opinione che quello che non mi si rappresentava in uno tratto, non mi occorressi anche poi, pensandovi; ho visto in fatto in me e in altri el contrario: che quanto più e meglio si pensa alle cose, tanto meglio si intendono e si fanno.

Guicciardini, *Ricordi*, n. 83

## Introduzione

Negli ultimi anni, grazie a nuove applicazioni in Computer Science, le logiche a molti valori hanno conosciuto un periodo di rinnovato interesse. Cinque libri sono apparsi recentemente sull' argomento [Got89], [BB92], [Häh93], [Mal93], [Sta94], e tre surveys sono in preparazione [Pan], [Got], [CM]. Fra le nuove applicazioni, troviamo verifica di circuiti [HK93], comunicazione con feedback [Mun89b], programmazione logica [Fit90], [Fit91], [DT91], intelligenza artificiale [Gin88].

Fra i sistemi a molti valori in letteratura, quello di Łukasiewicz ha sempre occupato un ruolo di particolare rilievo. Si tratta di una logica notevolmente espressiva e flessibile; trivalente nella sua formulazione originaria [Lu20], è estendibile in modo naturale a un sistema ad infiniti valori. A conferma di questo status privilegiato, il nome di MV-algebre (per *Many Valued algebras*) è tradizionalmente riservato alle algebre di Łukasiewicz.

Questa tesi raccoglie il lavoro di ricerca sulla logica infinito-valente di Łukasiewicz da me svolto in questi ultimi anni. Il suo scopo principale è di mostrare come questa logica abbia connessioni significative con vari campi della matematica, in particolare con i gruppi abeliani reticolari, le  $C^*$ -algebre, e le varietà toriche.

Il primo capitolo contiene le definizioni di base e una breve discussione sul rapporto fra il sistema di Łukasiewicz e altri sistemi a più valori.

Nel secondo capitolo viene dimostrato un teorema di forma normale, ottenendone come corollari i classici teoremi di completezza e di McNaughton.

Il terzo capitolo tratta delle relazioni fra le MV-algebre e i gruppi abeliani reticolari. Viene caratterizzato il gruppo degli automorfismi di una MV-algebra libera su un numero finito di generatori, e ne sono dimostrate alcune proprietà.

Nel quarto capitolo le MV-algebre vengono utilizzate per ottenere una classificazione di una certa classe di  $C^*$ -algebre approssimativamente finite. Riprendendo [MP93a], ma da un differente punto di vista, viene inoltre discusso il problema dell' equivalenza per diagrammi di Bratteli.

Il materiale presentato in questa tesi è apparso o è in corso di pubblicazione in [Pan92], [MP93b], [Pan95], [Pan], [DNGP].

## Notazione

$\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  denotano gli insiemi dei numeri interi, razionali, reali, e complessi, rispettivamente.

$\mathbf{Z}^+$ ,  $\mathbf{Q}^+$ ,  $\mathbf{R}^+$  denotano gli insiemi dei numeri interi, razionali, reali positivi, 0 incluso.

$\mathbf{N}$  è l'insieme  $\{1, 2, 3, \dots\}$ ;  $\omega$  è l'insieme  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

Scriviamo la composizione fra funzioni da destra verso sinistra:  $g \circ f$  indica  $f$  seguito da  $g$ .  $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  è la  $i$ -esima proiezione.

Indicando l' $i$ -esimo elemento di una  $n$ -upla con  $x_i$ , in genere pensiamo la  $n$ -upla come un vettore riga; indicandolo con  $x^i$ , la pensiamo come vettore colonna.

$\text{Mat}_n(A)$  è l'anello delle matrici  $n \times n$  sull'anello  $A$ .

Se  $(P, \leq)$  è un insieme parzialmente ordinato, scriviamo  $a, b \leq c$  per  $(a \leq c$  e  $b \leq c)$ , e scriviamo  $a, b \leq c, d$  per  $(a \leq b, a \leq d, b \leq c, e b \leq d)$ .  $(P, \leq)$  è *direttato superiormente* (*inferiormente*) se, per ogni  $a, b \in P$ , esiste  $c \in P$  tale che  $a, b \leq c$  ( $\geq c$ ).

## 1 Nozioni di base

L'insieme  $FORM$  delle formule della logica proposizionale di Łukasiewicz è costruito nel modo standard partendo da un insieme numerabile di variabili proposizionali  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , e dai connettivi  $\rightarrow, \neg$  (binario ed unario, rispettivamente) di implicazione e negazione. Usiamo  $A, B, C, \dots$  per denotare formule, ed adottiamo le abituali convenzioni sull'uso delle parentesi. Introduciamo i seguenti connettivi definiti:

$$1 = x_1 \rightarrow x_1;$$

$$0 = \neg 1;$$

$$A \oplus B = (\neg A) \rightarrow B;$$

$$A \cdot B = \neg((\neg A) \oplus (\neg B));$$

$$A \vee B = (A \rightarrow B) \rightarrow B;$$

$$A \wedge B = \neg((\neg A) \vee (\neg B));$$

$$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Conveniamo che  $\neg$  lega più strettamente di  $\oplus, \cdot, \vee, \wedge$ , i quali legano più strettamente di  $\rightarrow, \leftrightarrow$ . Indichiamo con  $FORM_n$  il sottoinsieme di  $FORM$  composto dalle formule le cui variabili proposizionali sono in  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Sia  $\mathbf{I}$  l'algebra di tipo  $(2, 1, 0)$  definita come segue:  $\mathbf{I} = ([0, 1], \rightarrow, \neg, 1)$ , dove  $[0, 1]$  è l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra 0 ed 1 (estremi inclusi),  $a \rightarrow b = \min\{1 - a + b, 1\}$ ,  $\neg a = 1 - a$ , 1 = il numero 1. Indichiamo con  $[0, 1]^\omega$  l'insieme di tutte le successioni  $(a_1, a_2, \dots)$  di elementi di  $[0, 1]$ , e con  $[0, 1]^n$  l'insieme di tutte le  $n$ -uple  $(a_1, \dots, a_n)$  di elementi di  $[0, 1]$ . Dotiamo  $[0, 1]$  della sua topologia usuale, e  $[0, 1]^\omega, [0, 1]^n$  della topologia prodotto. Introduciamo una funzione naturale  $(-, -) : FORM \times [0, 1]^\omega \rightarrow \mathbf{I}$  definita per induzione come segue: se  $A \in FORM$  e  $v = (a_1, a_2, \dots) \in [0, 1]^\omega$ , allora

$$\text{se } A = x_i, \text{ allora } (A, v) = a_i;$$

$$\text{se } A = B \rightarrow C, \text{ allora } (A, v) = (B, v) \rightarrow (C, v);$$

$$\text{se } A = \neg B, \text{ allora } (A, v) = \neg(B, v).$$

Per  $v$  fissato, otteniamo una *valutazione*, ovvero un omomorfismo  $\mathbf{v} = (-, v)$  dall'algebra assolutamente libera  $FORM$  all'algebra  $\mathbf{I}$ ; per  $A$  fissato, otteniamo una funzione  $\mathbf{A} = (A, -) : [0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]$ . Sostituendo  $FORM, [0, 1]^\omega$  con  $FORM_n, [0, 1]^n$ , rispettivamente, otteniamo funzioni  $(-, -) : FORM_n \times [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{v} : FORM_n \rightarrow \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{A} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ ; il contesto chiarirà sempre il dominio delle



funzioni a cui facciamo riferimento. Osserviamo che  $\mathbf{1}$  è la funzione (di dominio  $[0, 1]^\omega$  o  $[0, 1]^n$ , a seconda dei casi) il cui valore è costantemente 1, mentre  $\mathbf{0}$  è la funzione il cui valore è costantemente 0. Scriviamo  $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$  se, per ogni elemento  $v$  del dominio,  $\mathbf{A}(v) \leq \mathbf{B}(v)$ .

**Definizione 1.1** Una *funzione di McNaughton* su  $[0, 1]^n$  è una funzione continua  $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}$  per cui vale la seguente condizione:

esistono polinomi lineari  $f_1, \dots, f_k$ , con ogni  $f_i$  della forma  $a_i^1 x_1 + a_i^2 x_2 + \dots + a_i^n x_n + a_i^{n+1}$  per certi  $a_i^1, \dots, a_i^{n+1} \in \mathbf{Z}$ , tali che, per ogni  $v \in [0, 1]^n$ , esiste  $1 \leq i \leq k$  con  $f(v) = f_i(v)$ .

Una *funzione di McNaughton* su  $[0, 1]^\omega$  è una funzione  $g : [0, 1]^\omega \rightarrow \mathbf{R}$  tale che esiste  $n \geq 1$  ed esiste una funzione di McNaughton su  $[0, 1]^n$   $f$  per cui  $g = f \circ \rho_n$  (dove  $\rho_n$  è la proiezione naturale :  $[0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]^n$ ).

**Proposizione 1.2** Sia  $A \in FORM_n$ . Allora  $\mathbf{A} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  è una funzione di McNaughton su  $[0, 1]^n$ , e  $\mathbf{A} : [0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]$  è una funzione di McNaughton su  $[0, 1]^\omega$ .

DIMOSTRAZIONE. Induzione sul numero di connettivi in  $A$ . ■

La relazione  $(A, v) = 1$  induce in modo naturale una connessione di Galois fra  $FORM$  e  $[0, 1]^\omega$ . Per  $\Gamma \subseteq FORM$ , definiamo  $\Gamma' \subseteq [0, 1]^\omega$  come  $\Gamma' = \{v \in [0, 1]^\omega : (A, v) = 1 \text{ per ogni } A \in \Gamma\}$ . Analogamente, per  $U \subseteq [0, 1]^\omega$ , definiamo  $U' \subseteq FORM$  come  $U' = \{A \in FORM : (A, v) = 1 \text{ per ogni } v \in U\}$ . Otteniamo due applicazioni, denotate entrambe con  $'$ , l' una di dominio  $\mathcal{P}(FORM)$  e codominio  $\mathcal{P}([0, 1]^\omega)$ , e l' altra di dominio  $\mathcal{P}([0, 1]^\omega)$  e codominio  $\mathcal{P}(FORM)$ . Gli operatori  $'' : \mathcal{P}(FORM) \rightarrow \mathcal{P}(FORM)$  e  $''' : \mathcal{P}([0, 1]^\omega) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1]^\omega)$  son operatori di chiusura di Moore. Per  $U, V \subseteq [0, 1]^\omega$ , ponendo  $U' \vee V' = (U' \cup V')''$  e  $U' \wedge V' = U' \cap V'$ , otteniamo il reticolo completo  $(\{U' : U \subseteq [0, 1]^\omega\}, \vee, \wedge, [0, 1]^\omega, \emptyset')$  dei chiusi di  $FORM$ . Analogamente otteniamo il reticolo completo  $(\{\Gamma' : \Gamma \subseteq FORM\}, \vee, \wedge, FORM', \emptyset')$  dei chiusi di  $[0, 1]^\omega$ , ed i due reticoli sono antiisomorfi tramite gli antiisomorfismi  $'$ . Ovviamente, per  $\emptyset \subset FORM$  è  $\emptyset' = [0, 1]^\omega$ , e per  $\emptyset \subset [0, 1]^\omega$  è  $\emptyset' = FORM$ . D' altro canto,  $FORM' = \emptyset$  (per esempio, per nessun  $v \in [0, 1]^\omega$  è  $(\emptyset, v) = 1$ ). Poiché, per  $\emptyset \subset [0, 1]^\omega$ ,  $\emptyset'' = \emptyset$  è banale, scrivendo  $\emptyset''$  intenderemo sempre  $\emptyset$  come sottoinsieme di  $FORM$ . Sostituendo  $FORM, [0, 1]^\omega$  con  $FORM_n, [0, 1]^n$  nelle definizioni precedenti, otteniamo un' analoga connessione di Galois fra  $FORM_n$  e  $[0, 1]^n$ .

Per  $\Gamma \subseteq FORM$  e  $A \in FORM$ , diciamo che  $A$  è una *conseguenza semantica* di  $\Gamma$ , e scriviamo  $\Gamma \models A$ , se  $A \in \Gamma''$ , ovvero se vale la seguente:

per ogni valutazione  $\mathbf{v}$ , se per ogni  $B \in \Gamma$  si ha  $\mathbf{v}(B) = 1$ , allora  $\mathbf{v}(A) = 1$ .

Se  $\models A$ , diciamo che  $A$  è una *tautologia*. Indichiamo l' insieme  $\emptyset''$  delle tautologie con  $TAUT$ .

Dal punto di vista della logica a molti valori, abbiamo completamente definito la logica infinito-valente di Łukasiewicz: abbiamo definito il linguaggio e l'insieme delle formule, ed abbiamo definito la *matrice logica* [Res69], [Urq86], [Pan] in cui la sintassi prende valori. Prima di continuare il nostro studio, vogliamo adesso soffermarci brevemente sulle motivazioni che conducono all'analisi di una tale struttura, e sulla giustificazione dell'uso del termine “logica” usato nel riferirci ad essa.

Innanzitutto, alcune semplici osservazioni:

1. con pochi calcoli, è facile vedere che i connettivi  $0, \oplus, \cdot, \vee, \wedge, \leftrightarrow$  hanno la seguente interpretazione in **I**:

$0 =$  il numero 0;

$a \oplus b = \min\{a + b, 1\}$ ;

$a \cdot b = \max\{a + b - 1, 0\}$ ;

$a \vee b = \max\{a, b\}$ ;

$a \wedge b = \min\{a, b\}$ ;

$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \cdot (b \rightarrow a) = 1 - |a - b|$ .

2. se ristretti all'insieme  $\{0, 1\}$ , i connettivi  $\rightarrow, \neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow$  si comportano in modo booleano, mentre  $\oplus, \cdot$  coincidono con  $\vee, \wedge$ , rispettivamente;
3. vale l'aggiunzione:  $a \leq b \rightarrow c$  se e soltanto se  $a \cdot b \leq c$ ;
4. per la Proposizione 1.2 ogni funzione  $[0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]$  e  $[0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  indotta dai connettivi è continua.

Rovesciamo adesso il nostro punto di vista: supponiamo di voler costruire una logica proposizionale “naturale” che assuma valori in  $[0, 1]$ . Dotiamo  $[0, 1]$  della sua struttura naturale di reticolo con massimo e minimo, ed introduciamo in esso due operazioni binarie  $\cdot, \rightarrow$  (“prodotto” ed “implicazione”) tali che:

1.  $([0, 1], \cdot, 1)$  è un monoide commutativo;
2. la condizione di aggiunzione ( $a \leq b \rightarrow c$  se e soltanto se  $a \cdot b \leq c$ ) vale per ogni  $a, b, c \in [0, 1]$ .

Otteniamo una struttura  $([0, 1], \vee, \wedge, \cdot, \rightarrow, 0, 1)$  di *reticolo residuo* [DW39], [Pav79]. Reticoli residuati (ovvero reticoli con 0, 1, soddisfacenti le condizioni 1 e 2 di cui sopra) sono conosciuti in letteratura sotto nomi diversi: *integral commutative residuated monoid* in [Bir67], *residuated abelian semigroups* in [BJ72]. Un *reticolo residuo completo* (*complete lattice-ordered semigroup* in [Gog67]) è un reticolo residuo che ammette joints di cardinalità arbitraria.

**Proposizione 1.3** [Pav79, pp. 121–122] *Sia  $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$  un reticolo completo.*

1. Sia  $\cdot$  un'operazione binaria (non necessariamente commutativa) su  $L$  tale che:

a.  $\cdot$  è isotona in entrambe le variabili (ovvero  $a \leq b$  implica  $a \cdot c \leq b \cdot c$  e  $c \cdot a \leq c \cdot b$ );

b. per ogni  $b \in L$ ,  $(\bigvee_{j \in J} a_j) \cdot b = \bigvee_{j \in J} (a_j \cdot b)$ .

Allora esiste una ed una sola operazione binaria  $\rightarrow$  su  $L$  tale che la condizione di aggiunzione vale per la coppia  $(\cdot, \rightarrow)$ ; tale operazione è data da  $b \rightarrow c = \bigvee\{a : a \cdot b \leq c\}$ .

2. Sia  $\rightarrow$  un'operazione binaria su  $L$  tale che:

c.  $\rightarrow$  è antitona nella prima variabile ed isotona nella seconda;

d. per ogni  $b \in L$ ,  $b \rightarrow (\bigwedge_{j \in J} c_j) = \bigwedge_{j \in J} (b \rightarrow c_j)$ .

Allora esiste una ed una sola operazione binaria  $\cdot$  su  $L$  tale che la condizione di aggiunzione vale per la coppia  $(\cdot, \rightarrow)$ ; tale operazione è data da  $a \cdot b = \bigwedge\{c : a \leq b \rightarrow c\}$ .

3. In ogni reticolo residuo completo  $(L, \vee, \wedge, \cdot, \rightarrow, 0, 1)$  valgono le condizioni a,b,c,d. ■

Come dimostrato in [Pav79, p. 123], e riferimenti ivi citati, l'intervallo  $[0, 1]$  può essere dotato di  $2^{\aleph_0}$  strutture distinte di reticolo residuo in cui, inoltre, il prodotto è continuo.

**Esempio 1.4** Prendiamo  $\cdot = \wedge$ . Allora  $\rightarrow$  risulta definita da:

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq b; \\ b & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Otteniamo un'algebra di Heyting completa.

**Esempio 1.5** Sia  $\cdot$  il normale prodotto fra numeri reali. Otteniamo allora:

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq b; \\ b/a & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**Esempio 1.6** Sia  $\cdot$  il prodotto di Łukasiewicz. Allora  $a \rightarrow b = \min\{1 - a + b, 1\}$ , ovvero otteniamo l'implicazione di Łukasiewicz.

**Teorema 1.7** [MP76] Sia  $([0, 1], \vee, \wedge, \cdot, \rightarrow, 0, 1)$  un reticolo residuo in cui la struttura ridotta  $([0, 1], \vee, \wedge, 0, 1)$  è la struttura reticolare usuale di  $[0, 1]$ . Supponiamo che  $\rightarrow: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  sia continua. Allora  $\cdot, \rightarrow$  coincidono con il prodotto e l'implicazione di Łukasiewicz, rispettivamente. ■

Il teorema precedente è tanto più sorprendente se si considera che 56 anni separano i lavori [Lu20] e [MP76]. Di per sé, sarebbe già sufficiente a giustificare lo studio di una logica basata sulle definizioni di Lukasiewicz. Di fatto i lavori di Pavelka forniscono un ulteriore argomento, che ci limitiamo ad accennare brevemente. L'idea alla base della logica a molti valori è di permettere alle proposizioni di assumere valori di verità “sfumati”. A livello predicativo, questo comporta l'ammissione di predicati parimenti sfumati, in particolare i predicati di uguaglianza e di appartenenza. Ma adesso —e qui poniamo il confine fra logica a più valori e logica fuzzy— la fuzziness può lasciare il livello del linguaggio ed invadere quello del metalinguaggio. Non solo, cioè, possiamo costruire teorie che parlano di oggetti sfumati, ma le teorie stesse possono essere sfumate. Possiamo per esempio formulare nozioni come: “ $A$  è un'assioma della teoria  $T$  in grado  $a$ ”, “ $B$  è un teorema di  $T$  in grado  $b$ ”, ecc.... In [Pav79] è mostrato come sia possibile formalizzare queste costruzioni, ottenendo una sintassi ed una semantica naturali. Inoltre, vale il seguente risultato.

**Teorema 1.8** [Pav79, p. 450, Theorem 1.7] *Condizione necessaria affinché un calcolo fuzzy a valori di verità in una catena residuata completa  $(C, \vee, \wedge, \cdot, \rightarrow, 0, 1)$  sia completo è che  $\rightarrow: C^2 \rightarrow C$  sia continua nella topologia indotta dall'ordine.* ■

I teoremi 1.7 e 1.8 mostrano come, se vogliamo costruire una logica fuzzy ragionevole a valori in  $[0, 1]$ , l'unica scelta possibile sia costituita dai connettivi di Lukasiewicz.

Rimane aperto il problema di dare una giustificazione “linguistica” alla logica infinito-valente. Per esempio: cosa significa affermare che il valore di verità di una proposizione è  $1/2$ ? come mettere in relazione l'uso formale del simbolo  $\rightarrow$  con un ragionevole uso linguistico della parola “implica”? Rimandiamo a [Res69], [Sco76], [Urq86], [Mun89b] per un'analisi di questi ed analoghi problemi.



## 2 Il teorema di completezza

Riprendiamo in esame la connessione di Galois fra  $FORM$  e  $[0, 1]^\omega$ , ovvero fra l'insieme delle formule e lo spazio delle valutazioni. Abbiamo definito l'insieme delle tautologie  $TAUT$  come  $TAUT = \emptyset'' = \{A \in FORM : \mathbf{v}(A) = 1 \text{ per ogni valutazione } \mathbf{v}\}$ . Ovviamente,  $\emptyset \subset TAUT \subset FORM$ ; per esempio,  $x_1 \rightarrow x_1 \in TAUT$  e  $\neg(x_1 \rightarrow x_1) \notin TAUT$ . Il primo problema da affrontare è dunque quello di trovare un'assiomatizzazione dell'insieme  $TAUT$  in termini di assiomi e regole di inferenza. Più in generale, abbiamo il problema di trovare un'assiomatizzazione della relazione di conseguenza semantica  $\models$ .

Sia  $\Xi$  l'insieme di tutte le formule ottenibili per sostituzione uniforme di formule al posto delle metavariables  $A, B, C$  nei seguenti schemi di assioma:

$$\text{Ax1. } A \rightarrow (B \rightarrow A);$$

$$\text{Ax2. } (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C));$$

$$\text{Ax3. } ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A);$$

$$\text{Ax4. } (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A).$$

Per  $\Gamma \subseteq FORM$ , sia  $\overline{\Gamma} = \bigcap \{\Delta \subseteq FORM : \Xi \cup \Gamma \subseteq \Delta \text{ e } \Delta \text{ è chiuso per modus ponens}\}$ . Chiaramente  $\overline{\Gamma}$  coincide con l'insieme di tutte le formule  $A$  per cui vale la seguente condizione:

esiste una successione finita  $B_1, B_2, \dots, B_k$  di formule tale che  $B_k = A$  e, per ogni  $1 \leq i \leq k$ ,

$$\text{o } B_i \in \Xi \cap \Gamma;$$

oppure esistono  $1 \leq j, h < i$  tali che  $B_i$  è ottenibile da  $B_j, B_h$  tramite modus ponens.

È ovvio che  $\overline{\phantom{x}}$  è un operatore di chiusura su  $FORM$ :

1.  $\Gamma \subseteq \overline{\Gamma}$ ;
2. se  $\Gamma \subseteq \Delta$ , allora  $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Delta}$ ;
3.  $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\Gamma}$ .

Inoltre  $\overline{\phantom{x}}$  è compatto:

4. se  $A \in \overline{\Gamma}$ , allora esiste  $\Delta \subseteq \Gamma$ ,  $\Delta$  finito, con  $A \in \overline{\Delta}$ .

Se  $A \in \bar{\Gamma}$ , diciamo che  $A$  è *deducibile* da  $\Gamma$ , e scriviamo  $\Gamma \vdash A$ . Scriviamo  $\vdash A$  per  $\emptyset \vdash A$ , e  $B_1, \dots, B_n \vdash A$  per  $\{B_1, \dots, B_n\} \vdash A$ . Convenzioni analoghe valgono per il simbolo  $\models$ .

Vogliamo analizzare le relazioni esistenti fra i due operatori di chiusura  $\prime\prime$  e  $\bar{\phantom{x}}$  su *FORM*. Per induzione sulla lunghezza delle dimostrazioni, si dimostra facilmente che, per ogni  $\Gamma$ ,  $\bar{\Gamma} \subseteq \Gamma\prime\prime$ ; in altre parole, il calcolo è valido. In generale, per  $\Gamma$  arbitrario,  $\bar{\Gamma}$  è contenuto propriamente in  $\Gamma\prime\prime$ , ovvero non vale il teorema di completezza in forma forte; cfr. la Proposizione 3.35. Dedichiamo questo capitolo ad una dimostrazione originale, con tecniche geometriche, del teorema di completezza:  $\bar{\emptyset} = \emptyset\prime\prime$ .

**Osservazione 2.1** La congettura che gli schemi Ax1–Ax4, insieme con lo schema  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ , assiomatizzano con modus ponens l'insieme *TAUT*, è di Lukasiewicz. Nel 1935 Wajsberg annunciò di averne una dimostrazione, ma tale prova non è mai stata pubblicata. Nel 1958 Meredith e Chang dimostrarono — indipendentemente — che  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$  è derivabile dagli altri assiomi [Mer58], [Cha58a] e, nello stesso anno, Rose e Rosser [RR58] dettero una dimostrazione sintattica della congettura di Lukasiewicz. In [Cha59] Chang ha dato una dimostrazione algebrica, usando la completezza della teoria al primo ordine dei gruppi abeliani divisibili e totalmente ordinati. Cignoli ha ottenuto recentemente una nuova dimostrazione, usando la rappresentazione di Weinberg dei gruppi abeliani reticolari liberi [Cig92].

Fissiamo il linguaggio del primo ordine  $(\oplus, \cdot, \neg, 0, 1)$  di tipo  $(2, 2, 1, 0, 0)$ , ed introduciamo le abbreviazioni:

$$a \vee b = \neg(\neg a \oplus b) \oplus b;$$

$$a \wedge b = \neg(\neg a \cdot b) \cdot b;$$

$$a \rightarrow b = \neg a \oplus b;$$

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a).$$

Introduciamo i seguenti sistemi di identità:

$$\text{L1. } a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1;$$

$$\text{L2. } (a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1;$$

$$\text{L3. } ((a \rightarrow b) \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow a) = 1;$$

$$\text{L4. } (\neg a \rightarrow \neg b) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1;$$

$$\text{C1. } a \oplus b = b \oplus a; \quad a \cdot b = b \cdot a;$$

$$\text{C2. } a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c; \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c;$$

- C3.  $a \oplus \neg a = 1$ ;  $a \cdot \neg a = 0$ ;  
 C4.  $a \oplus 1 = 1$ ;  $a \cdot 0 = 0$ ;  
 C5.  $a \oplus 0 = a$ ;  $a \cdot 1 = a$ ;  
 C6.  $\neg(a \oplus b) = \neg a \cdot \neg b$ ;  $\neg(a \cdot b) = \neg a \oplus \neg b$ ;  
 C7.  $\neg\neg a = a$ ;  
 C8.  $\neg 0 = 1$ ;  
 C9.  $a \vee b = b \vee a$ ;  $a \wedge b = b \wedge a$ ;  
 C10.  $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ ;  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ ;  
 C11.  $a \oplus (b \wedge c) = (a \oplus b) \wedge (a \oplus c)$ ;  $a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$ ;  
 M1.  $a \oplus b = b \oplus a$ ;  
 M2.  $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ ;  
 M3.  $a \oplus 0 = a$ ;  
 M4.  $a \oplus 1 = 1$ ;  
 M5.  $\neg\neg a = a$ ;  
 M6.  $\neg 0 = 1$ ;  
 M7.  $\neg(\neg a \oplus b) \oplus b = \neg(\neg b \oplus a) \oplus a$ ;  
 M8.  $a \cdot b = \neg(\neg a \oplus \neg b)$ .

**Proposizione 2.2** [Cha58b, pp. 472–473], [Mun86, pp. 19–22] *Sotto le regole del calcolo equazionale, i sistemi di identità L1–L4, C1–C11, M1–M8 sono mutualmente equivalenti.* ■

**Definizione 2.3** Una MV-algebra (MV per “Many-Valued”) è un algebra  $(N, \oplus, \cdot, \neg, 0, 1)$ , soddisfacente M1–M8. Indichiamo la varietà delle MV-algebre con  $\mathcal{M}$ .

**Osservazione 2.4** Le identità L1–L4 sono ovviamente la traduzione degli assiomi di Łukasiewicz. Le C1–C11 sono dovute a Chang [Cha58b], mentre le M1–M8 sono di Mangani [Man73], [Mun86].

Poiché in una MV-algebra le operazioni  $\oplus, \cdot, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, 0, 1$  sono interdefinibili, modificheremo liberamente, secondo la convenienza, l’insieme delle operazioni che assumiamo come primitive. Per esempio, oltre al linguaggio pieno  $(\oplus, \cdot, \neg, 0, 1)$ , ciascuno fra  $(\oplus, \neg, 0)$ ,  $(\rightarrow, 0)$ ,  $(\rightarrow, \neg, 1)$  può essere assunto come linguaggio delle MV-algebre.



**Esempio 2.5** L' algebra  $\mathbf{I} = ([0, 1], \rightarrow, \neg, 1)$ , introdotta a pagina 3 è una MV-algebra. Sia  $M$  la sottoalgebra di  $\mathbf{I}^{[0,1]^\omega}$  data da tutte le funzioni di McNaughton su  $[0, 1]^\omega$  il cui range è contenuto in  $[0, 1]$ . Allora  $M$  è una MV-algebra. Analogamente, l' algebra di tutte le funzioni di McNaughton su  $[0, 1]^n$  il cui range è contenuto in  $[0, 1]$  è una MV-algebra, che indichiamo con  $M_n$ .

**Proposizione 2.6** [RR58, pp. 6–10] *Sia  $A \in FORM$ . Allora  $\vdash A \rightarrow A$ . Siano  $A, B, C \in FORM$ , e sia  $B$  una sottoformula di  $A$ . Scegliamo un' occorrenza di  $B$  in  $A$ , e sia  $D$  la formula ottenuta da  $A$  rimpiazzando  $B$  con  $C$  in quell' occorrenza. Allora ( $\vdash B \rightarrow C$  e  $\vdash C \rightarrow B$ ) implicano ( $\vdash A \rightarrow D$  e  $\vdash D \rightarrow A$ ). ■*

Come già implicitamente assunto nel definire una valutazione come un omomorfismo, identifichiamo  $FORM$  con l' insieme dei termini del linguaggio delle MV-algebre costruiti a partire dalle variabili proposizionali. Per la Proposizione 2.6, la relazione  $\equiv$  su  $FORM$  definita da:

$$A \equiv B \text{ se e soltanto se } (\vdash A \rightarrow B \text{ e } \vdash B \rightarrow A),$$

è una congruenza. Siano  $L, L_n$  le algebre di Lindenbaum ottenute quozientando le algebre assolutamente libere  $FORM, FORM_n$  tramite  $\equiv$ . Ovviamente  $L, L_n$  sono MV-algebre.

**Proposizione 2.7** *Sia  $A \in FORM$ . Allora  $\vdash A$  se e soltanto se l' identità  $A = 1$  è deducibile nel calcolo equazionale a partire dagli assiomi delle MV-algebre (ovvero  $A = 1$  è valida in ogni MV-algebra).*

**DIMOSTRAZIONE.** Assumiamo  $\vdash A$ . Sia  $B_1, B_2, \dots, B_k = A$  una deduzione di  $A$ . Sia  $1 \leq i \leq k$  e assumiamo per ipotesi induttiva che, per ogni  $1 \leq j < i$ ,  $B_j = 1$  sia deducibile dagli assiomi delle MV-algebre. Se  $B_i$  è un assioma,  $B_i = 1$  per L1–L4. Altrimenti, esiste  $C$  tale che  $C = 1, C \rightarrow B_i = 1$  sono deducibili. Otteniamo quindi:

$$1 \rightarrow B_i = 1;$$

$$\neg 1 \oplus B_i = 1;$$

$$0 \oplus B_i = 1;$$

$$B_i = 1.$$

Viceversa, se  $A = 1$  è valida in ogni MV-algebra, allora in particolare è valida in  $L$ . Quindi  $\vdash A \rightarrow 1$  e  $\vdash 1 \rightarrow A$  e, per modus ponens,  $\vdash A$ . ■

**Corollario 2.8** *Siano  $A, B \in FORM$ . Allora  $A \equiv B$  se e soltanto se  $A = B$  è deducibile nel calcolo equazionale delle MV-algebre.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A \equiv B$ . Allora per la Proposizione 2.7  $A \rightarrow B = 1$  e  $B \rightarrow A = 1$  sono deducibili. Abbiamo quindi:

$$\neg A \oplus B = 1;$$

$$\neg(\neg A \oplus B) = 0;$$

$$B \oplus \neg(\neg A \oplus B) = B \oplus 0;$$

$$B \vee A = B.$$

Analogamente otteniamo  $A \vee B = A$ , e quindi  $A = B$  per C9. Viceversa, se  $A = B$  è deducibile, allora  $(A/\equiv) = (B/\equiv)$  in  $L$ , e quindi  $A \equiv B$ . ■

**Corollario 2.9**  $L, L_n$  sono le MV-algebre libere su  $\omega$  e  $n$  generatori, rispettivamente. ■

Siano  $A, B \in FORM_n$ . Per la Proposizione 1.2,  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$ . Per il Corollario 2.9, se  $A \equiv B$ , allora  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Ne segue che l'applicazione  $: L_n \rightarrow M_n$  data da  $(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A}$  è un omomorfismo di MV-algebre. Analogamente,  $(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A} : L \rightarrow M$  è pure un omomorfismo di MV-algebre.

In ogni MV-algebra le operazioni  $\vee, \wedge$  inducono una struttura di reticolo distributivo, con massimo 1 e minimo 0 [Cha58b], [Cha59]. Scriviamo  $a \leq b$  per  $a \wedge b = a$ .

**Proposizione 2.10** In ogni MV-algebra valgono le seguenti:

1. leggi di De Morgan per  $\vee, \wedge, \neg$ ;
2.  $a \cdot b \leq a \wedge b \leq a \leq a \vee b \leq a \oplus b$ ;
3.  $(a \cdot \neg b) \wedge (\neg a \cdot b) = 0$ ;
4.  $a \vee b = b$  se e soltanto se  $\neg a \oplus b = 1$ ;
5.  $a \oplus b = b$  se e soltanto se  $\neg a \vee b = 1$ ;
6.  $a = (a \cdot \neg b) \oplus (a \wedge b)$ ;
7.  $a \wedge b = a \wedge c = 0$  implica  $a \wedge (b \oplus c) = 0$ ;
8.  $a \oplus (b \vee c) = (a \oplus b) \vee (a \oplus c)$ ;
9.  $a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b) \wedge (a \cdot c)$ .

DIMOSTRAZIONE. 1–5 sono dimostrate in [Cha58b].

$$6. (a \cdot \neg b) \oplus (a \wedge b) = (a \cdot \neg b) \oplus (a \cdot \neg(a \cdot \neg b)) = (a \cdot \neg b) \oplus \neg(\neg a \oplus (a \cdot \neg b)) = (a \cdot \neg b) \vee a = a.$$

7. Assumiamo  $a \wedge b = a \wedge c = 0$ . Per 5, abbiamo  $\neg a \oplus b = \neg a = \neg a \oplus c$ . Quindi  $\neg a \oplus (b \oplus c) = (\neg a \oplus b) \oplus c = \neg a \oplus c = \neg a$  e  $a \wedge (b \oplus c) = 0$ , sempre per 5.

$$8. (a \oplus b) \vee (a \oplus c) = a \oplus b \oplus \neg(a \oplus b \oplus \neg(a \oplus c)) = a \oplus b \oplus \neg(b \oplus (a \vee \neg c)) = a \oplus (b \vee (\neg a \wedge c)) = a \oplus ((b \vee \neg a) \wedge (b \vee c)) = (a \oplus (b \vee \neg a)) \wedge (a \oplus (b \vee c)) = 1 \wedge (a \oplus (b \vee c)) = a \oplus (b \vee c).$$

9. Segue da 8 per dualità. ■

Date due formule  $A, B$ , scriviamo  $A \leq B$  se  $(A/\equiv) \leq (B/\equiv)$  in  $L$ .

**Proposizione 2.11** *Per ogni  $A, B \in FORM$ , abbiamo:*

1.  $A \leq B$  se e soltanto se  $\vdash A \rightarrow B$ ;
2.  $A \equiv B$  se e soltanto se  $\vdash A \leftrightarrow B$  se e soltanto se  $\vdash (A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A)$ .

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione si dimostra applicando la Proposizione 2.10(4) alla MV-algebra  $L$ . La seconda segue da [RR58, Teorema 3.14]. ■

Poiché  $\oplus, \cdot, \vee, \wedge$  sono dimostrabilmente associative e commutative, useremo liberamente espressioni della forma  $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_k$ ,  $\bigoplus\{A_p : \dots p \dots\}$ , e simili. Per ogni numero intero  $k \geq 0$ , definiamo  $kA$  come:  $0A = 0$  e, se  $k > 0$ , allora  $kA = A \oplus (k-1)A$ . Estendendo in modo naturale l'osservazione 1 a pagina 5, si dimostra facilmente che in  $\mathbf{I}$  valgono:

$$a_1 \oplus \cdots \oplus a_k = \min\{a_1 + \cdots + a_k, 1\};$$

$$a_1 \cdots \cdots a_k = \max\{a_1 + \cdots + a_k - k + 1, 0\};$$

$$a_1 \vee \cdots \vee a_k = \max\{a_1, \dots, a_k\};$$

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = \min\{a_1, \dots, a_k\}.$$

**Proposizione 2.12** *Ciascuna delle affermazioni seguenti è equivalente al teorema di completezza:  $\vdash A$  se e soltanto se  $\models A$ .*

1.  $\emptyset'' = \bar{\emptyset}$ ;
2. per ogni  $n$ , l'omomorfismo  $(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A} : L_n \rightarrow M_n$  è iniettivo;
3. l'omomorfismo  $(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A} : L \rightarrow M$  è iniettivo;
4.  $A \leq B$  se e soltanto se  $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ ;
5.  $A \equiv B$  se e soltanto se  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ;
6.  $L$  appartiene alla sottovarietà di  $\mathcal{M}$  generata da  $\mathbf{I}$ ;

7.  $\mathbf{I}$  genera  $\mathcal{M}$ .

DIMOSTRAZIONE.  $\emptyset'' = \bar{\emptyset}$  significa ( $\vdash A$  se e soltanto se  $\models A$ ) per definizione.

1  $\implies$  2. Siano  $A, B \in FORM_n$ , ed ammettiamo  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Allora, per ogni valutazione  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}(A) = \mathbf{v}(B)$ . Per la Proposizione 2.10(4) applicata ad  $\mathbf{I}$ , per ogni  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}(A) \rightarrow \mathbf{v}(B) = \mathbf{v}(B) \rightarrow \mathbf{v}(A) = 1$ , ovvero, per ogni  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}(A \rightarrow B) = \mathbf{v}(B \rightarrow A) = 1$ . Quindi  $A \rightarrow B, B \rightarrow A \in \emptyset'' = \bar{\emptyset}$  e  $\vdash A \rightarrow B, \vdash B \rightarrow A$ . Ne segue che  $(A/\equiv) = (B/\equiv)$  in  $L_n$ , come volevasi dimostrare.

2  $\implies$  3. Ovvio.

3  $\implies$  4. Il "soltanto se" è ovvio. Sia  $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ . Allora in  $M$ , sempre per la Proposizione 2.10(4),  $\neg \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{1}$ , da cui  $((A \rightarrow B)/\equiv) = (1/\equiv)$  in  $L$ . Quindi  $\vdash A \rightarrow B$  e  $A \leq B$  per la Proposizione 2.11(1).

4  $\implies$  5. Ovvio.

5  $\implies$  6. Basta dimostrare che ogni identità vera in  $\mathbf{I}$  è vera in  $L$ . Sia  $A = B$  una tale identità. Allora, per ogni valutazione  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}(A) = \mathbf{v}(B)$ , ovvero  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ . Quindi  $A \equiv B$ , e  $A = B$  è vera in  $L$ .

6  $\implies$  7. Ovvio.

7  $\implies$  1. Sia  $A \in \emptyset''$ . Allora  $\mathbf{A} = \mathbf{1}$ , ovvero l'identità  $A = 1$  vale in  $\mathbf{I}$ . Quindi  $A = 1$  vale in  $L$ , ovvero  $\vdash A$ . ■

2.1 Partizioni dell'  $n$ -cubo

Iniziamo la nostra dimostrazione del teorema di completezza sviluppando alcuni strumenti di topologia piecewise-linear; rimandiamo a [RS72] per dettagli.

Fissiamo  $n \geq 1$ . Chiamiamo  $n$ -cubo l'insieme  $[0, 1]^n$ . Siano  $p^1, \dots, p^{k+1} \in \mathbf{Q}^n$  tali che  $p^2 - p^1, p^3 - p^1, \dots, p^{k+1} - p^1$  sono linearmente indipendenti. Indichiamo con  $\langle p^1, \dots, p^{k+1} \rangle$  il  $k$ -simpleso determinato da  $p^1, \dots, p^{k+1}$ , ovvero l'insieme  $\{\lambda_1 p^1 + \dots + \lambda_{k+1} p^{k+1} : \lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \text{ sono reali } \geq 0 \text{ la cui somma è } 1\}$ .

Diciamo che  $p^1, \dots, p^{k+1}$  sono i *vertici* di  $\langle p^1, \dots, p^{k+1} \rangle$ . Per definizione, l'insieme vuoto è un  $-1$ -simpleso. Uno  $0$ -simpleso è un punto di coordinate razionali, ed un  $1$ -simpleso è un segmento di estremi razionali. Una *faccia* di  $\langle p^1, \dots, p^{k+1} \rangle$  è un simpleso determinato da un sottoinsieme di  $p^1, \dots, p^{k+1}$ ; l'insieme vuoto è una faccia di ogni simpleso.

Dato  $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{Q}^n$ , rimangono univocamente determinati gli interi relativamente primi  $b_1, \dots, b_{n+1}$  tali che  $b_{n+1} \geq 1$  e, per ogni  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i = b_i/b_{n+1}$ . Diciamo che  $(b_1, \dots, b_{n+1})$  sono le *coordinate omogenee* di  $p$ , e che  $b_{n+1}$ , che indichiamo con  $\text{den}(p)$ , è il *denominatore* di  $p$ .

Se  $\langle p^1, \dots, p^{n+1} \rangle$  è un  $n$ -simpleso, la sua *matrice associata* è la matrice  $(n+1) \times (n+1)$  la cui  $i$ -esima riga è data dalle coordinate omogenee di  $p^i$ . La matrice associata ad un  $n$ -simpleso è ben definita a meno dell'ordine delle righe. L'unico punto in cui ciò avrà importanza è nella dimostrazione del Teorema 3.40.

Chiamiamo *unimodulare* un  $n$ -simpleso la cui matrice associata è unimodulare,

cioè ha determinante di valore assoluto 1. Chiamiamo *unimodulare* anche un  $k$ -simpleso che sia faccia di qualche  $n$ -simpleso unimodulare.

Sia  $C$  un insieme finito di semplici. Diciamo che  $C$  costituisce un *complesso* se valgono le seguenti condizioni:

1. ogni faccia di ogni simpleso di  $C$  appartiene a  $C$ ;
2. ogni due semplici di  $C$  si intersecano in una faccia comune.

Indichiamo con  $|C|$  il *supporto* di  $C$ , ovvero l' unione di tutti i semplici di  $C$ . Se vale:

3.  $|C| = [0, 1]^n$ ;

allora diciamo che  $C$  è una *partizione dell'  $n$ -cubo*. Dato un simpleso  $S$ , l' insieme delle sue facce costituisce un complesso che, con abuso di notazione, indichiamo pure con  $S$ .

Un *complesso unimodulare (partizione unimodulare)* è un complesso (partizione) i cui semplici sono tutti unimodulari.

Se  $C, C'$  sono complessi,  $|C| = |C'|$ , e ogni simpleso di  $C'$  è contenuto in qualche simpleso di  $C$ , allora diciamo che  $C'$  è una *suddivisione* di  $C$ , e scriviamo  $C' < C$ . In questo caso, ogni simpleso di  $C$  è unione di semplici di  $C'$ , e quindi ogni 0-simpleso di  $C$  è uno 0-simpleso di  $C'$ . Se  $\langle p \rangle$  è uno 0-simpleso di  $C$ , allora diciamo che  $p$  è un *vertice* di  $C$  e, per brevità, scriviamo  $p \in C$  invece di  $\langle p \rangle \in C$ .

Sia  $\langle u, v \rangle$  un 1-simpleso unimodulare,  $(a_1, \dots, a_{n+1}), (b_1, \dots, b_{n+1})$  le coordinate omogenee di  $u, v$ , rispettivamente. Allora  $(a_1 + b_1, \dots, a_{n+1} + b_{n+1})$  sono le coordinate omogenee di un punto di  $\langle u, v \rangle$ , che chiamiamo la *mediante di Farey* di  $\langle u, v \rangle$ . Sia  $S = \langle u, v, w^1, \dots, w^r \rangle$  un  $(r + 1)$ -simpleso di cui  $\langle u, v \rangle$  è una faccia (eventualmente  $r = 0$  e  $S = \langle u, v \rangle$ ). Sia  $w$  la mediante di  $\langle u, v \rangle$ , sia  $S' = \langle w, v, w^1, \dots, w^r \rangle$ , e sia  $S'' = \langle u, w, w^1, \dots, w^r \rangle$ . È facile dimostrare che  $S', S''$  sono  $(r + 1)$ -simplessi unimodulari. Sia  $C$  un complesso unimodulare,  $\langle u, v \rangle$  un suo 1-simpleso. Sia  $C'$  la suddivisione di  $C$  ottenuta sostituendo ogni simpleso  $S \in C$  di cui  $\langle u, v \rangle$  è una faccia con tutte le facce dei due simplessi  $S', S''$  ottenuti come sopra. Diciamo che  $C'$  è ottenuto *starrando*  $C$  nella mediante di  $\langle u, v \rangle$ .

Per comodità, diamo un nome ai vertici  $(0, 0, \dots, 0)$  e  $(1, 1, \dots, 1)$  dell'  $n$ -cubo, indicandoli con  $o$  ed  $e$ , rispettivamente (per *origin* e *end*). Diciamo che una sequenza  $v^1, \dots, v^{n+1}$  di vertici dell'  $n$ -cubo costituisce un *percorso* se  $v^1 = o$ ,  $v^{n+1} = e$  e, per ogni  $1 \leq i \leq n$ , esiste  $1 \leq j \leq n$  tale che  $v^i = v^{i+1}$  in tutte le coordinate eccetto la  $j$ -esima, la  $j$ -esima coordinata di  $v^i$  è 0, e la  $j$ -esima coordinata di  $v^{i+1}$  è 1. Un *sottopercorso* di  $v^1, \dots, v^{n+1}$  è una sottosequenza di  $v^1, \dots, v^{n+1}$ ; i sottopercorsi di  $v^1, \dots, v^{n+1}$  sono in corrispondenza biunivoca con le facce di  $\langle v^1, \dots, v^{n+1} \rangle$ . Diciamo che il vertice  $v$  ha *altezza*  $k$  se esiste un percorso  $v^1, \dots, v^{n+1}$  tale che  $v = v^{k+1}$ . Equivalentemente,  $v$  ha altezza  $k$  se  $\{t : v_t = 1\}$  ha cardinalità  $k$ . Diciamo che il vertice  $v$  è *sopra* il vertice  $u$  (e che  $u$  è *sotto*  $v$ ) se esiste un percorso

$v^1, \dots, v^{n+1}$  ed esistono  $1 \leq i < j \leq n+1$  tali che  $u = v^i$  e  $v = v^j$ ; equivalentemente,  $\{t : u_t = 1\} \subset \{t : v_t = 1\}$ . Se  $u$  e  $v$  sono diversi e non sono sopra o sotto l' uno dell' altro, diciamo che sono *inconfrontabili*.

Indichiamo con  $\text{Sym}(n)$  il gruppo simmetrico su  $n$  elementi. Dati  $\sigma \in \text{Sym}(n)$  ed una matrice  $(n+1) \times (n+1)$   $A$ , indichiamo con  $\sigma A$  la matrice ottenuta applicando  $\sigma$  alle prime  $n$  colonne di  $A$ , ed indichiamo con  $A\sigma$  la matrice ottenuta applicando  $\sigma$  alle prime  $n$  righe di  $A$ .

Indichiamo con  $J$  la matrice  $(n+1) \times (n+1)$  i cui elementi sono 1 nell' ultima colonna e strettamente sotto la diagonale principale, e 0 altrimenti. Ovviamente gli  $n$ -simplessi i cui vertici costituiscono un percorso sono associati a matrici della forma  $\sigma J$ , e questa corrispondenza è biunivoca. Indichiamo con  $\langle \sigma \rangle$  l'  $n$ -simpleso associato con  $\sigma J$ . Per ogni  $\sigma \in \text{Sym}(n)$ ,  $\langle \sigma \rangle$  è unimodulare.

Sia  $K^*$  l' insieme di tutte le facce di tutti gli  $n$ -simplessi della forma  $\langle \sigma \rangle$ , per  $\sigma \in \text{Sym}(n)$ . L' insieme  $K^*$  è noto in teoria degli spazi di Banach; di fatto, è usato nella costruzione di basi squew pyramidal nello spazio delle funzioni continue a valori reali sull'  $n$ -cubo [Sem82, pp. 60–61].

**Lemma 2.13**  $K^*$  è una partizione unimodulare dell'  $n$ -cubo.

**DIMOSTRAZIONE.** Per costruzione, ogni simpleso in  $K^*$  è unimodulare. Mostriamo prima che l' intersezione di due  $n$ -simplessi di  $K^*$  è una faccia di entrambi. Supponiamo che  $u^1, \dots, u^{n+1}$  e  $v^1, \dots, v^{n+1}$  siano percorsi, e che  $w^1, \dots, w^r$  sia il sottopercorso di entrambi i cui vertici sono i vertici comuni ai due  $n$ -simplessi. Allora  $r \geq 2$ , ed è sufficiente dimostrare che  $\langle u^1, \dots, u^{n+1} \rangle \cap \langle v^1, \dots, v^{n+1} \rangle = \langle w^1, \dots, w^r \rangle$ . L' inclusione  $\supseteq$  è ovvia. Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, \mu_1, \dots, \mu_{n+1}$  reali positivi tali che  $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = \mu_1 + \dots + \mu_{n+1} = 1$  e  $\lambda_1 u^1 + \dots + \lambda_{n+1} u^{n+1} = \mu_1 v^1 + \dots + \mu_{n+1} v^{n+1}$ . È sufficiente dimostrare che  $u^i \neq v^i$  implica  $\lambda_i = \mu_i = 0$ . È chiaro che  $u^j = v^j$  implica  $\lambda_j = \mu_j$ . Sia  $i$  tale che  $u^i \neq v^i$ . Allora esistono  $t \geq 1$  e una successione  $2 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq n$  tali che  $u^{i_1} \neq v^{i_1}, \dots, u^{i_t} \neq v^{i_t}$  e, per  $j \neq i_1, \dots, i_t$ ,  $v^j = u^j$ . Di conseguenza  $\lambda_{i_1} u^{i_1} + \dots + \lambda_{i_t} u^{i_t} = \mu_{i_1} v^{i_1} + \dots + \mu_{i_t} v^{i_t}$ . Dimostriamo che  $\lambda_{i_1} = \dots = \lambda_{i_t} = \mu_{i_1} = \dots = \mu_{i_t} = 0$  per induzione su  $t$ .

Se  $t = 1$ , la cosa è ovvia.

Sia  $t > 1$ , e siano  $U, V$  le matrici  $t \times (n+1)$  le cui  $j$ -esime righe sono date dalle coordinate omogenee di  $u^{i_j}$  e di  $v^{i_j}$ , rispettivamente. I vettori riga  $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_t})U$  e  $(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_t})V$  sono uguali. Poiché le  $t$ -esime righe di  $U$  e di  $V$  sono diverse le une dalle altre, e inoltre sono diverse da  $(1, 1, \dots, 1)$ , ne segue che esiste una colonna di  $U$ , diciamo la  $k$ -esima, composta interamente di zeri, mentre l' elemento nella  $t$ -esima riga e  $k$ -esima colonna di  $V$  è 1. Poiché  $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_t} \geq 0$ , abbiamo che  $\mu_{i_t} = 0$  e, analogamente,  $\lambda_{i_t} = 0$ . Quindi  $\lambda_{i_1} u^{i_1} + \dots + \lambda_{i_{t-1}} u^{i_{t-1}} = \mu_{i_1} v^{i_1} + \dots + \mu_{i_{t-1}} v^{i_{t-1}}$ , e siamo a posto per ipotesi induttiva.

Siano adesso  $S', T'$  simplessi arbitrari di  $K^*$ , e siano  $S, T$   $n$ -simplessi di  $K^*$  tali che  $S'$  è una faccia di  $S$  e  $T'$  è una faccia di  $T$ . Abbiamo allora:

- |     |   |                      |
|-----|---|----------------------|
| (1) | $S \cap T$ è una faccia di $T$ ,                              | come già dimostrato; |
| (2) | $T'$ è una faccia di $T$ ,                                    | per ipotesi;         |
| (3) | $(S \cap T) \cap T' = S \cap T'$ è una faccia di $S \cap T$ , | per (1) e (2);       |
| (4) | $S' \cap T$ è una faccia di $S \cap T$ ,                      | analogamente a (3);  |
| (5) | $S' \cap T'$ è una faccia di $S \cap T$ ,                     | per (3) e (4);       |
| (6) | $S' \cap T'$ è una faccia di $T$ ,                            | per (1) e (5);       |
| (7) | $S' \cap T'$ è una faccia di $T'$ ,                           | per (2) e (6);       |
| (8) | $S' \cap T'$ è una faccia di $S'$ ,                           | analogamente a (7).  |

(per ottenere (3) e (7) usiamo il fatto che  $T$  è un complesso, mentre per ottenere (5) usiamo il fatto che  $S \cap T$  è un complesso). Rimane da dimostrare che l'  $n$ -cubo è l' unione di tutti i semplici di  $K^*$ . Sia  $p = (a_1, \dots, a_n)$  un punto dell'  $n$ -cubo, e sia  $b_1, \dots, b_n$  una permutazione di  $a_1, \dots, a_n$  tale che  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . Allora  $p = (b_1, \dots, b_n)A$ , dove  $A$  è ottenuta permutando le colonne della matrice identica  $n \times n$ . Sia  $B$  la matrice la cui  $i$ -esima riga è la somma delle prime  $i$  righe di  $A$ . È facile dimostrare per induzione che  $p = (b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_{n-1} - b_n, b_n)B$ . Sia  $v^1, \dots, v^{n+1}$  il percorso in cui le coordinate di  $v^{i+1}$  sono date dalla  $i$ -esima riga di  $B$ ; abbiamo allora  $p = (1 - b_1)v^1 + (b_1 - b_2)v^2 + \dots + (b_{n-1} - b_n)v^n + b_nv^{n+1}$ . Inoltre,  $1 - b_1, b_1 - b_2, b_2 - b_3, \dots, b_{n-1} - b_n, b_n$  sono numeri reali positivi la cui somma è 1, e quindi  $p \in \langle v^1, \dots, v^{n+1} \rangle$ , come volevamo dimostrare. ■

Nel seguente Lemma, fondamentale nella nostra costruzione, usiamo un risultato nella teoria delle varietà toriche [Oda78], [DCP85], [Oda88].

**Lemma 2.14** *Esiste una successione infinita  $K_0, K_1, K_2, \dots$  di partizioni unimodulari dell'  $n$ -cubo, tale che:*

1.  $K_0$  è la partizione  $K^*$ ;
2. ogni  $K_{i+1}$  è ottenuta starrando  $K_i$  nella mediante di un suo 1-simplesso;
3. per ogni partizione dell'  $n$ -cubo  $K$ , esiste un indice  $i$  tale che  $K_i < K$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostreremo il seguente fatto: sia  $C$  una partizione unimodulare dell'  $n$ -cubo, e sia  $\pi$  un iperpiano affine di equazione  $a^1x_1 + \dots + a^nx_n + a^{n+1} = 0$ , con  $a^1, \dots, a^{n+1}$  interi. Allora esiste una successione finita  $C = C_0, C_1, \dots, C_t$  di partizioni unimodulari dell'  $n$ -cubo tale che  $C_{i+1}$  è ottenuta starrando  $C_i$  nella mediante di un 1-simplesso, e ogni simplesso di  $C_t$  è contenuto interamente in uno dei due semispazi chiusi determinati da  $\pi$ . Questo fatto è una conseguenza del teorema di De Concini-Procesi sull' eliminazione dei punti di indeterminatezza [DCP85, Lemma 2.3], [Oda88, p. 39]; ne diamo qui una dimostrazione semplificata.

Sia  $\pi$  come sopra, e sia  $D$  una partizione unimodulare dell'  $n$ -cubo. Se  $\langle p \rangle$  è uno 0-simplesso di  $D$  e  $(b_1, \dots, b_{n+1})$  sono le coordinate omogenee di  $p$ , poniamo

$f(p) = a^1 b_1 + \dots + a^n b_n + a^{n+1} b_{n+1}$ . Per ogni 1-simplesso  $\langle p, q \rangle$  di  $D$ , il suo difetto, defect  $\langle p, q \rangle$ , è definito da:

$$\text{defect } \langle p, q \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq f(p), f(q) \text{ o } 0 \geq f(p), f(q); \\ |f(p)| + |f(q)|, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia  $d = \max\{\text{defect } \langle p, q \rangle : \langle p, q \rangle \in D\}$ , e sia  $s$  il numero degli 1-simplessi di  $D$  aventi difetto  $d$ . Il difetto di  $D$ , defect  $D$ , è la coppia  $(d, s)$ . Lavoriamo per induzione sull' insieme  $\{\text{defect } D : D \text{ è una partizione unimodulare dell' } n\text{-cubo}\}$ , ordinato lessicograficamente. Se ogni 1-simplesso di  $C_0$  ha difetto 0, non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, sia defect  $C_0 = (d, s)$ , con  $d, s > 0$ , e sia  $\langle p, q \rangle \in C_0$  avente difetto  $d$ . Starriamo  $C_0$  nella mediante  $r$  di  $\langle p, q \rangle$ , ottenendo  $C_1$ . L' 1-simplesso  $\langle p, q \rangle$  non è un semplice di  $C_1$ , e ogni 1-simplesso di  $C_1$  che non è un 1-simplesso di  $C_0$  è della forma  $\langle r, u \rangle$ , dove  $u$  è un vertice di qualche  $n$ -simplesso  $S \in C_0$  di cui  $\langle p, q \rangle$  è una faccia. È sufficiente dimostrare che, per ogni tale  $\langle r, u \rangle$ , abbiamo defect  $\langle r, u \rangle < d$ .

Se  $f(r) = 0$ , allora  $\langle r, u \rangle$  ha difetto 0. Altrimenti, assumiamo senza perdita di generalità che  $f(p) < 0 < f(r) < f(q)$ . Se  $0 \leq f(u)$ , allora  $\langle r, u \rangle$  ha difetto 0; altrimenti, defect  $\langle r, u \rangle = |f(r)| + |f(u)| < |f(q)| + |f(u)|$ . Poiché  $\langle q, u \rangle$  è una faccia di  $S$ , è anche un 1-simplesso di  $C_0$ , e quindi  $|f(q)| + |f(u)| = \text{defect } \langle q, u \rangle \leq d$ , come volevamo dimostrare.

Sia adesso  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$  una fissata enumerazione di tutti gli iperpiani affini i cui coefficienti sono interi. Otteniamo allora una successione

$$\begin{aligned} K_0 &> K_1 > \dots > K_{t_1} \\ K_{t_1} &> K_{t_1+1} > \dots > K_{t_1+t_2} \\ K_{t_1+t_2} &> K_{t_1+t_2+1} > \dots > K_{t_1+t_2+t_3} \\ &\dots \end{aligned}$$

inizianta con  $K_0 = K^*$ , e tale che:

- (i)  $K_{i+1}$  è ottenuta starrando  $K_i$  nella mediante di un 1-simplesso;
- (ii) per ogni  $j \geq 1$ , ogni semplice  $K_{t_1+\dots+t_j}$  è interamente contenuto in uno dei due semispazi chiusi determinati dall' iperpiano  $\pi_j$ .

Poiché ogni  $n$ -simplesso unimodulare è delimitato da  $n + 1$  tali iperpiani, è chiaro che la successione così costruita raffina ogni partizione unimodulare dell'  $n$ -cubo. ■

**Definizione 2.15** Chiamiamo la successione  $K_0, K_1, \dots$  costruita nel Lemma 2.14 la *successione fondamentale* dell'  $n$ -cubo.

**Osservazione 2.16** La costruzione della successione fondamentale dell'  $n$ -cubo data nel Lemma 2.14 è non canonica, ovvero, nel corso delle costruzione, vengono fatte



infinite scelte arbitrarie. Per  $n = 1$  una costruzione canonica è data dalla serie di Farey [Mun88], [MP94]. Una costruzione analoga per  $n > 1$  implicherebbe l'esistenza di un diagramma di Bratteli universale canonico (cfr. l'osservazione dopo l'Esempio 4.27), e la forma forte della congettura di Oda [Oda78].

**Proposizione 2.17** *Sia  $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  una funzione di McNaughton. Allora esiste un indice  $i$  tale che  $f$  è lineare su ogni simplesso di  $K_i$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per [McN51, p. 2],  $f$  induce una suddivisione dell' $n$ -cubo in un numero finito di celle  $n$ -dimensionali tali che  $f$  è lineare su ogni cella (cfr. la Definizione 3.39). Per [RS72, Proposition 2.9], ogni  $n$ -cella può essere suddivisa in un numero finito di  $n$ -simplessi, senza introdurre nuovi vertici. Basta adesso applicare il Lemma 2.14. ■

## 2.2 Cappelli di Schauder

Sia  $C$  una partizione unimodulare dell' $n$ -cubo,  $p$  un vertice di  $C$ . Sia  $\langle q^1, \dots, q^{n+1} \rangle$  un  $n$ -simplesso di  $C$  di cui  $p$  è un vertice, diciamo  $p = q^i$ . Sia  $A$  la matrice associata a  $\langle q^1, \dots, q^{n+1} \rangle$ , e siano  $a^1, \dots, a^{n+1} \in \mathbf{Z}$  gli elementi nella  $i$ -esima colonna di  $A^{-1}$ . Allora  $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}$  definita da

$$f(x_1, \dots, x_n) = a^1 x_1 + \dots + a^n x_n + a^{n+1}$$

è l'unica funzione lineare tale che

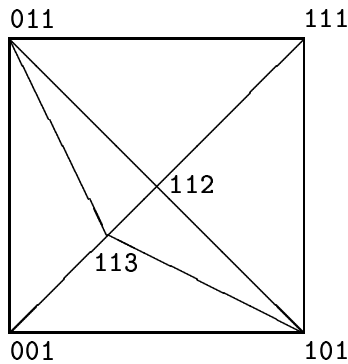
$$f(q^j) = \begin{cases} 1/\text{den}(p) & \text{se } j = i; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ripetendo questo procedimento per ogni  $n$ -simplesso di cui  $p$  è un vertice, è facile determinare esplicitamente la funzione di McNaughton  $g_p^C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  definita da:

1.  $g_p^C(p) = 1/\text{den}(p)$ ;
2.  $g_p^C(q) = 0$  per ogni vertice  $q$  di  $C$ ,  $q \neq p$ ;
3.  $g_p^C$  è lineare su ogni simplesso di  $C$ .

In accordo con [Mun94], diciamo che  $g_p^C$  è il *cappello di Schauder* di  $C$  in  $p$ .

**Esempio 2.18** Sia  $n = 2$ ,  $C$  la partizione unimodulare del 2-cubo data da



dove i vertici sono indicati in coordinate omogenee, e siano  $q^1 = (1, 0, 1)$ ,  $q^2 = (1, 1, 2)$ ,  $q^3 = p = (1, 1, 3)$ . Allora la matrice  $A$  associata al 2-simplesso  $\langle q^1, q^2, q^3 \rangle$  è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

la cui inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il cappello di Schauder  $g_p^C$ , il cui grafo è

ha dunque equazione  $-x_1 - x_2 + 1$  su  $\langle q^1, q^2, q^3 \rangle$ .

Sia  $A \in FORM$  tale che  $\mathbf{A} = g_p^C$  per qualche  $C, p$ ; diciamo allora che  $A$  è una *formula di Schauder* di  $C$  in  $p$ . Notiamo che, dati  $C$  e  $p$ , il cappello di Schauder di  $C$  in  $p$  è univocamente determinato, mentre ci sono più formule di Schauder

di  $C$  in  $p$ . Comunque, come conseguenza del teorema di completezza e della Proposizione 2.12(5), risulterà che tutte le formule di Schauder di  $C$  in  $p$  sono equivalenti. La molteplicità  $m_p$  di un cappello di Schauder, o di una formula di Schauder, di  $C$  in  $p$  è  $m_p = \text{den}(p)$ .

Osserviamo che ogni funzione di McNaughton  $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbf{R}$  assume in  $p$  un valore multiplo intero di  $1/\text{den}(p)$ . Nel Lemma seguente costruiamo esplicitamente formule di Schauder di  $K^*$ ; cfr. [Mun94] e riferimenti ivi citati.

**Lemma 2.19** *Per ogni vertice dell'  $n$ -cubo  $v$  esiste una formula di Schauder  $h_v$  di  $K^*$  in  $v$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $v$  un vertice dell'  $n$ -cubo, diciamo di altezza  $k$ . Scegliamo  $\sigma \in \text{Sym}(n)$  tale che la  $(k+1)$ -esima riga di  $\sigma J$  è il vettore esprimente  $v$  in coordinate omogenee. È facile verificare che

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovvero che l' elemento  $b_j^i$  nella  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna di  $J^{-1}$  è

$$b_j^i = \begin{cases} -1, & \text{se } i = j < n + 1; \\ 1, & \text{se } j = i + 1 \text{ o } (i = n + 1 \text{ e } j = 1); \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Abbiamo  $(\sigma J)^{-1} = J^{-1}\sigma$ . Per la discussione precedente l' Esempio 2.18, la funzione lineare  $f_\sigma$  che assume valore 1 in  $v$  e valore 0 in tutti gli altri vertici di  $\langle \sigma \rangle$  ha equazione

$$f_\sigma(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} -x_{\sigma(1)} + 1, & \text{se } k = 0; \\ x_{\sigma(n)}, & \text{se } k = n; \\ x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k+1)}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia  $f_v$  la funzione piecewise-linear con coefficienti interi definita da  $f_v(x_1, \dots, x_n) = \min\{\max\{f_\sigma(x_1, \dots, x_n), 0\} : v \text{ è un vertice di } \langle \sigma \rangle\}$ . Dimostreremo che  $f_v$  è il cappello di Schauder di  $K^*$  in  $v$ . A questo fine, è sufficiente mostrare che, per ogni  $n$ -simpleso  $\langle \tau \rangle$  di  $K^*$ , si ha

$$f_v = \begin{cases} f_\tau, & \text{se } v \text{ è un vertice di } \langle \tau \rangle; \\ 0, & \text{se } v \text{ non è un vertice di } \langle \tau \rangle. \end{cases}$$

Supponiamo che  $\langle \tau \rangle$  sia un tale  $n$ -simpleso.

*Caso 1.*  $v$  è un vertice di  $\langle \tau \rangle$ . Affermiamo che, per ogni  $\sigma$  tale che  $v$  è un vertice di

$\langle \sigma \rangle$ , si ha  $f_\tau \leq f_\sigma$  su  $\langle \tau \rangle$ . Per linearità, è sufficiente dimostrare che, per ogni vertice  $u$  di  $\langle \tau \rangle$ , vale  $f_\tau(u) \leq f_\sigma(u)$ .

*Sottocaso 1.1.*  $u = v$ . Allora  $f_\tau(u) = f_\sigma(u) = 1$ , e non c'è niente da dimostrare.

*Sottocaso 1.2.*  $u \neq v$ . Allora  $f_\tau(u) = 0$ , ed è impossibile che  $f_\sigma(u) = -1$ . Infatti, in caso contrario, se fosse  $f_\sigma(u) = -1$ , allora avremmo  $u_{\sigma(k)} = 0$  e  $u_{\sigma(k+1)} = 1$ . Di conseguenza, se  $u$  è sotto  $v$ , allora  $v_{\sigma(k+1)} = 1$  e  $v$  ha altezza almeno  $k+1$ , e questa è una contraddizione. D'altra parte, se  $u$  è sopra  $v$ , allora  $v_{\sigma(k)} = 0$  e  $v$  ha altezza al più  $k-1$ , e questa è pure una contraddizione.

*Caso 2.*  $v$  non è un vertice di  $\langle \tau \rangle$ . In tal caso  $k \neq 0, n$ . Troveremo  $\sigma$  tale che  $v$  è un vertice di  $\langle \sigma \rangle$  e  $f_\sigma$  assume valore 0 o  $-1$  su tutti i vertici  $u$  di  $\langle \tau \rangle$ . Di nuovo per linearità, questo sarà sufficiente per dimostrare la nostra affermazione. Sia  $w$  il vertice di altezza  $k$  di  $\langle \tau \rangle$ . Esistono allora  $1 \leq i \neq j \leq n$  tali che  $v_i = w_j = 1$  e  $v_j = w_i = 0$ . Scegliamo  $\sigma$  tale che  $v$  è un vertice di  $\langle \sigma \rangle$ ,  $\sigma(k) = i$ , e  $\sigma(k+1) = j$ . Sia  $u$  un vertice di  $\langle \tau \rangle$ . Supponiamo per assurdo che  $f_\sigma(u) = 1$ . Allora  $u_i = 1$  e  $u_j = 0$ ; ne segue che  $u \neq w$  e  $u$  è inconfrontabile con  $w$ . Questa è una contraddizione, e il nostro asserto è dimostrato.

È adesso un facile esercizio controllare che la formula  $h_v$  definita da

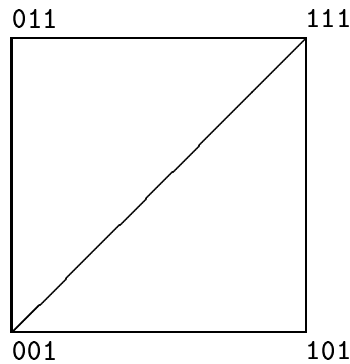
$$h_v = \begin{cases} \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \cdots \wedge \neg x_n, & \text{se } v = o; \\ x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n, & \text{se } v = e; \\ \bigwedge \{x_i \cdot \neg x_j : v_i = 1 \text{ e } v_j = 0\}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è tale che  $\mathbf{h}_v = f_v$ , come desiderato. ■

Notiamo che, per la Proposizione 2.10(9),

$$\bigwedge \{x_i \cdot \neg x_j : v_i = 1 \text{ e } v_j = 0\} \equiv \bigwedge \{x_i : v_i = 1\} \cdot \bigwedge \{\neg x_j : v_j = 0\}.$$

**Esempio 2.20** Di nuovo, sia  $n = 2$ . Allora  $K^*$  è



Abbiamo  $h_{001} = \neg x_1 \wedge \neg x_2$ ,  $h_{101} = x_1 \cdot \neg x_2$ ,  $h_{111} = x_1 \wedge x_2$ ,  $h_{011} = \neg x_1 \wedge x_2$ , e i corrispondenti cappelli di Schauder sono

È facile convincersi che, in  $M_n$ , vale  $\sum\{\mathbf{h}_v : v \in K^*\} = \mathbf{1}$ . Più interessante è notare che gli assiomi di Lukasiewicz sono in grado di dimostrare tale fatto, ovvero di dimostrare  $\bigoplus\{h_v : v \in K^*\} \equiv 1$ ; cfr. l' Osservazione 2.25.

**Lemma 2.21** *Sia  $n > 1$ , e siano  $u, v$  vertici dell'  $n$ -cubo tali che  $u_i = v_i$  per  $i \neq n$ , e  $v_n = 1 - u_n$ . Sia  $w$  il vertice dell'  $(n-1)$ -cubo definito da  $w_i = u_i$  per  $i = 1, \dots, n-1$ . Allora  $h_w \equiv h_u \oplus h_v$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo assumere che  $u_n = 0$  e  $v_n = 1$ . Per evitare di dover trattare separatamente i casi in cui uno fra  $u, v$  è  $o$  oppure  $e$ , adottiamo la seguente convenzione: faremo uso —solo per questa dimostrazione— di  $x_0$  e  $x_{n+1}$  come simboli per 0 e 1, rispettivamente. Porremo inoltre  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = (0, u_1, \dots, u_n, 1)$ ,  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) = (0, v_1, \dots, v_n, 1)$ ,  $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}, w_{n+1}) = (0, w_1, \dots, w_{n-1}, 1)$ . Definiamo  $h_u, h_v, h_w$  come nel Lemma 2.19, con indici varianti in  $\{0, \dots, n-1, n, n+1\}$  nel caso di  $h_u$  e di  $h_v$ , e con indici varianti in  $\{0, \dots, n-1, n+1\}$  nel caso di  $h_w$ . È facile convincersi che queste convenzioni determinano soltanto una variazione irrilevante delle formule di Schauder, e che il calcolo dimostra l' equivalenza delle due versioni. Per

esempio, per  $n = 2$ ,  $h_{01} = x_2 \cdot \neg x_1$  diviene  $(x_2 \cdot \neg x_0) \wedge (x_2 \cdot \neg x_1) \wedge (x_3 \cdot \neg x_0) \wedge (x_3 \cdot \neg x_1)$ , che è equivalente a  $(x_2 \wedge x_3) \cdot (\neg x_0 \wedge \neg x_1) = (x_2 \wedge 1) \cdot (\neg 0 \wedge \neg x_1)$ .

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
h_v &\equiv h_w \wedge \wedge \{x_n \cdot \neg x_j : v_j = 0\} \\
&\equiv h_w \wedge (x_n \cdot \wedge \{\neg x_j : v_j = 0\}) \\
&\equiv h_w \cdot \neg(h_w \cdot \neg(x_n \cdot \wedge \{\neg x_j : v_j = 0\})) \\
&\equiv h_w \cdot \neg(\wedge \{x_i : w_i = 1\} \cdot \wedge \{\neg x_j : w_j = 0\} \cdot \neg(x_n \cdot \wedge \{\neg x_j : v_j = 0\})) \\
&\equiv h_w \cdot \neg(\wedge \{x_i : w_i = 1\} \cdot (\neg x_n \wedge \wedge \{\neg x_j : w_j = 0\})) \\
&\equiv h_w \cdot \neg(\wedge \{x_i : w_i = 1\} \cdot \wedge \{\neg x_j : u_j = 0\}) \\
&\equiv h_w \cdot \neg h_u
\end{aligned}$$

Le ultime quattro formule sono equivalenti perché  $\{j : w_j = 0\} = \{j : v_j = 0\}$  e  $\{i : w_i = 1\} = \{i : u_i = 1\}$ . Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
h_u \oplus h_v &\equiv h_u \oplus (h_w \cdot \neg h_u) \\
&\equiv (h_w \rightarrow h_u) \rightarrow h_u \\
&\equiv h_w \vee h_u \\
&\equiv h_w
\end{aligned}$$

L'ultima equivalenza segue osservando che  $h_u \leq h_w$ . ■

**Lemma 2.22** *Sia  $C_1$  una partizione unimodulare dell'  $n$ -cubo. Supponiamo di avere, per ogni vertice  $p$  di  $C_1$ , una formula di Schauder  $h_p^1$  di  $C_1$  in  $p$ . Sia  $\langle u, v \rangle$  un 1-simplesso di  $C_1$ ,  $w$  la sua mediante di Farey,  $C_2$  la suddivisione di  $C_1$  ottenuta starrando  $C_1$  in  $w$ . Per ogni vertice  $s$  di  $C_2$ , sia  $h_s^2$  definita come segue:*

$$h_s^2 = \begin{cases} h_s^1 & \text{se } s \neq u, v, w; \\ h_u^1 \wedge h_v^1 & \text{se } s = w; \\ h_u^1 \cdot \neg h_v^1 & \text{se } s = u; \\ h_v^1 \cdot \neg h_u^1 & \text{se } s = v. \end{cases}$$

Allora  $h_s^2$  è una formula di Schauder di  $C_2$  in  $s$ ; inoltre  $h_u^1 \equiv h_u^2 \oplus h_w^2$  e  $h_v^1 \equiv h_v^2 \oplus h_w^2$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo innanzi tutto che  $\mathbf{h}_u^1(w) = \mathbf{h}_v^1(w) = 1/\text{den}(w)$ . Lavorando in coordinate omogenee, poniamo  $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$ ,  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ ,  $w = (u_1 + v_1, \dots, u_{n+1} + v_{n+1})$ .  $\mathbf{h}_u^1$  ha la forma  $a^1 x_1 + \dots + a^n x_n + a^{n+1}$  su  $\langle u, v \rangle$ , con  $\mathbf{h}_u^1(u) = 1/u_{n+1}$  e  $\mathbf{h}_u^1(v) = 0$ ; ne segue che  $\mathbf{h}_u^1(w) = 1/(u_{n+1} + v_{n+1}) = 1/\text{den}(w)$ . La dimostrazione per  $\mathbf{h}_v^1$  è analoga.

*Caso 1.*  $s \neq u, v, w$ . Poiché  $\mathbf{h}_s^1(u) = \mathbf{h}_s^1(v) = 0$ , segue per linearità che  $\mathbf{h}_s^1(w) = 0$ . Poiché  $\mathbf{h}_s^1$  è lineare su ogni simplesso di  $C_1$ , e  $C_2$  è una suddivisione di  $C_1$ , a fortiori  $\mathbf{h}_s^2 = \mathbf{h}_s^1$  è lineare su ogni simplesso di  $C_2$ , che è quanto volevamo dimostrare.

*Caso 2.*  $s = w$ . Chiaramente, per ogni  $w \neq t \in C_2$ , abbiamo  $\mathbf{h}_w^2(t) = 0$ ; inoltre,  $\mathbf{h}_w^2(w) = \mathbf{h}_u^1(w) \wedge \mathbf{h}_v^1(w) = 1/\text{den}(w)$ . Dobbiamo dimostrare che  $\mathbf{h}_w^2$  è lineare su ogni  $n$ -simplesso  $T$  di  $C_2$ .

*Sottocaso 2.1.*  $T$  è un  $n$ -simplesso di  $C_1$ . Ne segue che  $\langle u, v \rangle$  non è una faccia di  $T$  in  $C_1$  e uno fra  $u, v$ , diciamo  $u$ , non è un vertice di  $T$ ; di conseguenza  $\mathbf{h}_w^2 = \mathbf{h}_u^1 = 0$  su  $T$ .

*Sottocaso 2.2.* Esiste un  $n$ -simplesso  $S = \langle u, v, w^1, \dots, w^r \rangle$  di  $C_1$  per cui  $T = S'$  o  $T = S''$  ( $S', S''$  come a pagina 16). Senza perdita di generalità,  $T = S' = \langle w, v, w^1, \dots, w^r \rangle$ .  $\mathbf{h}_u^1$  e  $\mathbf{h}_v^1$  coincidono su tutti i vertici di  $T$ , eccetto  $v$ ;  $\mathbf{h}_u^1(v) = 0$  e  $\mathbf{h}_v^1(v) = 1/\text{den}(v)$ . Quindi, poiché sia  $\mathbf{h}_u^1$  che  $\mathbf{h}_v^1$  sono lineari su  $S \supset T$ , ne segue che  $\mathbf{h}_w^2 = \mathbf{h}_u^1$  su  $T$ , e in particolare  $\mathbf{h}_w^2$  è lineare su  $T$ .

*Caso 3.*  $s = u$ . Abbiamo  $\mathbf{h}_u^2 = \max\{\mathbf{h}_u^1 + \mathbf{1} - \mathbf{h}_v^1 - \mathbf{1}, \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{h}_u^1 - \mathbf{h}_v^1, \mathbf{0}\} = \mathbf{h}_u^1 + \max\{-\mathbf{h}_v^1, -\mathbf{h}_u^1\} = \mathbf{h}_u^1 - \min\{\mathbf{h}_v^1, \mathbf{h}_u^1\}$ . Ne segue che  $\mathbf{h}_u^2(t) = 0$  per ogni  $u \neq t \in C_2$ , e inoltre  $\mathbf{h}_u^2(u) = 1/\text{den}(u)$ . Sia  $T$  un  $n$ -simplesso di  $C_2$ .

*Sottocaso 3.1.* Assumiamo le stesse ipotesi come nel Sottocaso 2.1; ne segue che almeno uno fra  $u$  e  $v$  non è un vertice di  $T$ .

- se  $u$  non è un vertice di  $T$ , allora  $\mathbf{h}_u^1 = \mathbf{0}$  su  $T$  e  $\mathbf{h}_u^2 = \mathbf{0}$  su  $T$ ;
- se  $v$  non è un vertice di  $T$ , allora  $\mathbf{h}_v^1 = \mathbf{0}$  su  $T$  e  $\mathbf{h}_u^2 = \mathbf{h}_u^1$  on  $T$ .

In entrambi i casi  $\mathbf{h}_u^2$  è lineare su  $T$ .

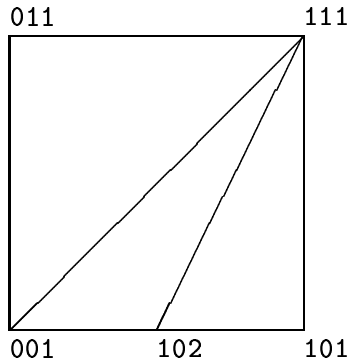
*Sottocaso 3.2.* Stesse ipotesi come nel Sottocaso 2.2;  $T = S' = \langle w, v, w^1, \dots, w^r \rangle$ . Per ogni vertice  $t$  di  $T$ , abbiamo  $\mathbf{h}_u^1(t) \leq \mathbf{h}_v^1(t)$ , e quindi, per linearità,  $\min\{\mathbf{h}_v^1, \mathbf{h}_u^1\} = \mathbf{h}_u^1$  su  $T$ , e  $\mathbf{h}_u^2 = \mathbf{0}$  su  $T$ .

*Sottocaso 3.3.* Stesse ipotesi come nel Sottocaso 2.2;  $T = S'' = \langle u, w, w^1, \dots, w^r \rangle$ . Ragionando come sopra, abbiamo  $\min\{\mathbf{h}_v^1, \mathbf{h}_u^1\} = \mathbf{h}_v^1$  on  $T$ , e quindi  $\mathbf{h}_u^2 = \mathbf{h}_u^1 - \mathbf{h}_v^1$  su  $T$ . Poiché sia  $\mathbf{h}_u^1$  che  $\mathbf{h}_v^1$  sono lineari su  $T$ , così è  $\mathbf{h}_u^2$ .

*Caso 4.*  $s = v$ . Analogo al Caso 3.

L' ultimo enunciato segue dalla Proposizione 2.10(6). ■

**Esempio 2.23** Sia  $C_1$  la partizione  $K^*$  dell' Esempio 2.20. Poniamo  $u = (0, 0, 1)$  e  $v = (1, 0, 1)$ . Allora  $w = (1, 0, 2)$  e  $C_2$  è



Otteniamo quindi

$$h_{001}^2 = (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \cdot \neg(x_1 \cdot \neg x_2);$$

$$h_{101}^2 = (x_1 \cdot \neg x_2) \cdot \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2);$$

$$h_{102}^2 = \neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge (x_1 \cdot \neg x_2);$$

i cui grafici sono, nell' ordine:

**Definizione 2.24** Sia  $C$  una partizione unimodulare dell'  $n$ -cubo, e supponiamo di avere, per ogni vertice  $p$  di  $C$ , una formula di Schauder  $h_p$  di  $C$  in  $p$ . Diciamo che l' insieme  $\{h_p : p \in C\}$  ha la:

proprietà (a) se, per ogni  $p^1, \dots, p^k \in C$ , se  $\langle p^1, \dots, p^k \rangle \notin C$ , allora  $h_{p^1} \wedge \dots \wedge h_{p^k} \equiv 0$ ;

proprietà (b) se, per ogni  $p \in C$ ,  $\neg h_p \equiv (m_p - 1)h_p \oplus \bigoplus \{m_q h_q : p \neq q \in C\}$ ;

proprietà (c) se, per ogni insieme di numeri interi  $\{n_p : p \in C\}$  tali che, per ogni  $p \in C$ ,  $0 \leq n_p \leq m_p$ , abbiamo  $\neg(\bigoplus \{n_p h_p : p \in C\}) \equiv \bigoplus \{(m_p - n_p)h_p : p \in C\}$ .

**Osservazione 2.25** La proprietà (b) implica  $\vdash \bigoplus \{m_p h_p : p \in C\}$ .



**Lemma 2.26** *La proprietà (b) e la proprietà (c) sono equivalenti.*

**DIMOSTRAZIONE.** Chiaramente la proprietà (c) implica la proprietà (b). Assumiamo la proprietà (b), e lavoriamo per induzione su  $\sum\{n_p : p \in C\}$ .

Se  $\sum\{n_p : p \in C\} = 0$ , allora dobbiamo dimostrare che  $\vdash \neg 0 \leftrightarrow \bigoplus\{m_p h_p : p \in C\}$ , ovvero che  $\vdash \bigoplus\{m_p h_p : p \in C\}$ . Questa è esattamente l'osservazione precedente. Fissiamo  $q \in C$  tale che  $n_q > 0$ . Per ipotesi induttiva

$$\neg((n_q - 1)h_q \oplus \bigoplus\{n_p h_p : q \neq p \in C\}) \equiv h_q \oplus \bigoplus\{(m_p - n_p)h_p : p \in C\}.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \neg(\bigoplus\{n_p h_p : p \in C\}) &\equiv \neg(h_q \oplus \neg(h_q \oplus \bigoplus\{(m_p - n_p)h_p : p \in C\})) \\ &\equiv \neg(h_q \vee \neg(\bigoplus\{(m_p - n_p)h_p : p \in C\})) \\ &\equiv \neg h_q \wedge \bigoplus\{(m_p - n_p)h_p : p \in C\} \\ &\equiv ((m_q - 1)h_q \oplus \bigoplus\{m_p h_p : q \neq p \in C\}) \wedge \\ &\quad \bigoplus\{(m_p - n_p)h_p : p \in C\} \\ &\equiv \bigoplus\{(m_p - n_p)h_p : p \in C\} \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

**Lemma 2.27** *Sotto le ipotesi della Definizione 2.24, assumiamo che  $\{h_p : p \in C\}$  abbia le proprietà (a) e (c). Sia  $p$  un vertice di  $C$ , sia  $L$  l'insieme dei vertici  $q$  di  $C$  tali che l'1-simplesso  $\langle p, q \rangle$  appartiene a  $C$ , e sia  $\{l_q : q \in C\}$  un insieme di numeri interi positivi tali che, per ogni  $t \in \{p\} \cup L$ , abbiamo  $l_t \geq m_t$ . Allora  $\bigoplus\{l_q h_q : q \in C\} \equiv m_p h_p \oplus \bigoplus\{l_q h_q : p \neq q \in C\}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente dimostrare che  $\vdash l_p h_p \oplus \bigoplus\{m_q h_q : q \in L\} \leftrightarrow m_p h_p \oplus \bigoplus\{m_q h_q : q \in L\}$ . Sia  $A = \bigoplus\{m_q h_q : q \in L\}$ . Lavorando per induzione su  $l_p - m_p$ , ci riduciamo facilmente a dover mostrare che  $\vdash (m_p + 1)h_p \oplus A \leftrightarrow m_p h_p \oplus A$ . Sia  $H = \{q \in C : q \neq p \text{ e } q \notin L\}$ . Per la proprietà (a) abbiamo, per ogni  $q \in H$ ,  $\vdash \neg(h_p \wedge h_q)$ . Per induzione, usando la Proposizione 2.10(7), otteniamo  $\vdash \neg(h_p \wedge \bigoplus\{m_q h_q : q \in H\})$ . Per la proprietà (c),  $\vdash \bigoplus\{m_q h_q : q \in H\} \leftrightarrow \neg(m_p h_p \oplus A)$ , e quindi

$$\begin{aligned} &\vdash \neg(h_p \wedge \neg(m_p h_p \oplus A)), \\ &\vdash \neg h_p \vee (m_p h_p \oplus A), \\ &\vdash h_p \oplus m_p h_p \oplus A \leftrightarrow m_p h_p \oplus A, \end{aligned}$$

per la Proposizione 2.10(5). ■

**Lemma 2.28** *L'insieme  $\{h_v : v \in K^*\}$  ha le proprietà (a) e (b).*

DIMOSTRAZIONE. Proprietà (a). Siano  $v^1, \dots, v^k$  vertici dell'  $n$ -cubo, senza perdita di generalità in ordine nondecrescente di altezza. Se  $\langle v^1, \dots, v^k \rangle \notin K^*$ , allora deve esistere  $1 \leq i \neq j \leq k$  tale che  $v^i$  è confrontabile con  $v^j$ . Di conseguenza, esistono  $1 \leq r \neq s \leq n$  tali che  $v_r^i = v_s^j = 0$  e  $v_s^i = v_r^j = 1$ . Poiché  $h_{v^1} \wedge \dots \wedge h_{v^k} \leq (x_r \cdot \neg x_s) \wedge (x_s \cdot \neg x_r)$  e  $(x_r \cdot \neg x_s) \wedge (x_s \cdot \neg x_r) \equiv 0$  per la Proposizione 2.10(3), ne segue che  $h_{v^1} \wedge \dots \wedge h_{v^k} \equiv 0$ , come volevasi dimostrare.

Proprietà (b). Induzione su  $n$ . Se  $n = 1$ , la cosa è ovvia, poiché in tal caso  $h_0 = \neg x_1$  e  $h_1 = x_1$ . Sia  $n > 1$ , e scegliamo un vertice  $u$  dell'  $n$ -cubo. Sia  $v$  il vertice definito da  $v_i = u_i$  per  $i \neq n$ , e  $v_n = 1 - u_n$ . Per il Lemma 3.8 e l' ipotesi induttiva, abbiamo

$$\begin{aligned} \neg(h_u \oplus h_v) &\equiv \bigoplus \{h_w : w \neq u, v\}, \\ \neg(h_u \oplus h_v) \oplus h_v &\equiv \bigoplus \{h_w : w \neq u\}, \\ \neg h_u \vee h_v &\equiv \bigoplus \{h_w : w \neq u\}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, se  $u_n = 0$ , allora  $h_v \leq x_n \leq \neg h_u$ , e se  $u_n = 1$ , allora  $h_v \leq \neg x_n \leq \neg h_u$ . In entrambi i casi,  $\neg h_u \vee h_v \equiv \neg h_u$ , come volevamo dimostrare. ■

**Lemma 2.29** Siano  $C_1, \langle u, v \rangle, C_2, h_p^1, h_s^2$  come nell' enunciato del Lemma 2.22. Allora:

1. se  $\{h_p^1 : p \in C_1\}$  ha la proprietà (a), allora  $\{h_s^2 : s \in C_2\}$  ha la proprietà (a);
2. se  $\{h_p^1 : p \in C_1\}$  ha la proprietà (b), allora  $\{h_s^2 : s \in C_2\}$  ha la proprietà (b).

DIMOSTRAZIONE. 1. Sia  $p^1, \dots, p^k \in C_2$ , e assumiamo che  $0 < h_{p^1}^2 \wedge \dots \wedge h_{p^k}^2$ .

Caso 1.  $w \notin \{p^1, \dots, p^k\}$ . Poiché, per ogni  $i$ ,  $h_{p^i}^2 \leq h_{p^i}^1$ , abbiamo  $0 < h_{p^1}^1 \wedge \dots \wedge h_{p^k}^1$ . Per ipotesi,  $\langle p^1, \dots, p^k \rangle \in C_1$ ; inoltre,  $h_u^2 \wedge h_v^2 = (h_u^1 \cdot \neg h_v^1) \wedge (h_v^1 \cdot \neg h_u^1) \equiv 0$ , e quindi almeno uno fra  $u, v$  non è in  $\{p^1, \dots, p^k\}$ . Ne segue che  $\langle u, v \rangle$  non è una faccia di  $\langle p^1, \dots, p^k \rangle$ , e quindi quest' ultimo è in  $C_2$ .

Caso 2. Senza perdita di generalità,  $w = p_1$ . Se uno fra  $u, v$  è in  $\{p^2, \dots, p^k\}$ , diciamo  $v = p^2$ , allora abbiamo  $0 < h_w^2 \wedge h_v^2 \wedge h_{p^3}^2 \wedge \dots \wedge h_{p^k}^2 \leq h_u^1 \wedge h_v^1 \wedge h_{p^3}^1 \wedge \dots \wedge h_{p^k}^1 \equiv h_u^1 \wedge h_v^1 \wedge h_{p^3}^1 \wedge \dots \wedge h_{p^k}^1$ , e quindi  $\langle u, v, p^3, \dots, p^k \rangle \in C_1$  e  $\langle w, v, p^3, \dots, p^k \rangle \in C_2$ , come volevamo dimostrare.

Se nessuno fra  $u, v$  è in  $\{p^2, \dots, p^k\}$  allora, per  $i = 2, \dots, k$ , abbiamo  $h_{p^i}^2 = h_{p^i}^1$ . Di conseguenza  $0 < h_w^2 \wedge h_{p^2}^2 \wedge \dots \wedge h_{p^k}^2 \equiv h_u^1 \wedge h_v^1 \wedge h_{p^2}^1 \wedge \dots \wedge h_{p^k}^1$ , e quindi  $\langle u, v, p^2, \dots, p^k \rangle \in C_1$ . Ne segue che  $\langle w, v, p^2, \dots, p^k \rangle$  e la sua faccia  $\langle w, p^2, \dots, p^k \rangle$  sono in  $C_2$ .

2. Notiamo innanzi tutto che  $m_w = \text{den}(w) = \text{den}(u) + \text{den}(v) = m_u + m_v$ . Quindi, per il Lemma 2.22,  $\vdash m_u h_u^1 \oplus m_v h_v^1 \leftrightarrow m_u h_u^2 \oplus m_v h_v^2 \oplus m_w h_w^2$ . Sia  $p \in C_2$ .

Caso 1.  $p \neq u, v, w$ . Allora  $h_p^2 = h_p^1$ , e  $\vdash \neg h_p^2 \leftrightarrow (m_p - 1)h_p^2 \oplus \bigoplus \{m_q h_q^2 : p \neq q \in C_2\}$  vale per ipotesi e per l' osservazione precedente.

Caso 2.  $p = w$ . Sia  $A = \bigoplus\{m_q h_q^1 : u, v \neq q \in C_1\} = \bigoplus\{m_q h_q^2 : u, v, w \neq q \in C_2\}$ . Allora

$$\begin{aligned}
(m_w - 1)h_w^2 \oplus m_u h_u^2 \oplus m_v h_v^2 \oplus A &\equiv m_u h_u^1 \oplus (m_v - 1)h_v^1 \oplus h_v^2 \oplus A \\
&\equiv \neg h_v^1 \oplus h_v^2 \\
&\equiv \neg h_v^1 \oplus (h_v^1 \cdot \neg h_u^1) \\
&\equiv \neg(h_v^1 \cdot \neg(h_v^1 \cdot \neg h_u^1)) \\
&\equiv \neg(h_u^1 \wedge h_v^1) \\
&\equiv \neg h_w^2
\end{aligned}$$

Caso 3.  $p = u$ . Sia  $A$  come sopra. Allora

$$\begin{aligned}
(m_u - 1)h_u^2 \oplus m_v h_v^2 \oplus m_w h_w^2 \oplus A &\equiv (m_u - 1)h_u^1 \oplus m_v h_v^1 \oplus h_w^2 \oplus A \\
&\equiv \neg h_u^1 \oplus h_w^2 \\
&\equiv \neg h_u^1 \oplus (h_u^1 \wedge h_v^1) \\
&\equiv (\neg h_u^1 \oplus h_u^1) \wedge (\neg h_u^1 \oplus h_v^1) \\
&\equiv 1 \wedge \neg(h_u^1 \cdot \neg h_v^1) \\
&\equiv \neg h_u^2
\end{aligned}$$

Caso 4.  $p = v$ . Analogo al Caso 3. ■

### 2.3 Il teorema di completezza e il teorema di McNaughton

Sia  $A \in FORM_n$ , e sia  $C$  una partizione dell'  $n$ -cubo tale che, per ogni vertice  $p$  di  $C$ , esiste una formula di Schauder  $h_p$  di  $C$  in  $p$ . Diciamo che  $A$  è  $C$ -decomponibile se esiste un insieme di numeri naturali  $\{n_p : p \in C\}$  tale che:

1. per ogni  $p \in C$ ,  $0 \leq n_p \leq m_p$ ;
2.  $A \equiv \bigoplus\{n_p h_p : p \in C\}$ .

Notiamo che, se  $A$  è  $C$ -decomponibile, allora gli  $n_p$  sono univocamente determinati. Infatti, risulta  $\mathbf{A} = \bigoplus\{n_p \mathbf{h}_p : p \in C\}$ . Sia  $q \in C$ . Allora  $\mathbf{A}(q) = \bigoplus\{n_p \mathbf{h}_p(q) : p \in C\} = \min\{\sum\{n_p \mathbf{h}_p(q) : p \in C\}, 1\} = n_q \mathbf{h}_q(q) = n_q / m_q$ , e quindi  $n_q = m_q \mathbf{A}(q)$ .

Per i Lemmi 2.19, 2.22, 2.28, 2.29, sappiamo che, per ogni  $K_i$  nella successione fondamentale dell'  $n$ -cubo, e per ogni  $p \in K_i$ , esiste una formula di Schauder  $h_p^i$  di  $K_i$  in  $p$ ; inoltre, le proprietà (a), (b), (c), valgono per  $\{h_p^i : p \in K_i\}$ . Per il Lemma 2.22, è chiaro che, se  $A$  è  $K_i$ -decomponibile e  $j \geq i$ , allora  $A$  è  $K_j$ -decomponibile. Il seguente è un teorema di forma normale.

**Teorema 2.30** *Sia  $A \in FORM_n$ . Allora esiste un indice  $i$  tale che  $A$  è  $K_i$ -decomponibile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Induzione sul numero dei connettivi in  $A$ .

*Passo base.*  $A$  è una variabile proposizionale. Rinominando eventualmente le variabili, possiamo assumere che  $A = x_1$ . Allora  $\vdash A \leftrightarrow \bigoplus\{h_u : u \in K_0 \text{ and } u_1 = 1\}$ , e quindi  $A$  è  $K_0$ -decomponibile. Dimostriamo questo fatto per induzione su  $n$ . Il caso  $n = 1$  è ovvio. Il passo induttivo segue dal Lemma 3.8.

*Primo passo induttivo.*  $A = \neg B$ , e  $B$  è  $K_i$ -decomponibile. Allora  $A$  è  $K_i$ -decomponibile, poiché in  $\{h_p^i : p \in K_i\}$  vale la proprietà (c).

*Secondo passo induttivo.*  $A = B \oplus C$ , e sia  $B$  che  $C$  sono decomponibili nella successione fondamentale dell'  $n$ -cubo. Per la Proposizione 2.17 e l' ipotesi induttiva, possiamo trovare un indice  $i$  tale che  $\mathbf{A}$  è lineare su ogni simpleso di  $K_i$ , e sia  $B$  che  $C$  sono  $K_i$ -decomponibili. Ne segue che esiste un insieme di interi  $\{l_p : p \in K_i\}$  tale che, per ogni  $p \in K_i$ , abbiamo  $0 \leq l_p \leq 2m_p$  e  $\vdash A \leftrightarrow \bigoplus\{l_p h_p^i : p \in K_i\}$ . Per ogni  $p \in K_i$ , sia  $n_p = \min\{l_p, m_p\}$ . Affermiamo che  $\vdash A \leftrightarrow \bigoplus\{n_p h_p^i : p \in K_i\}$ . Per dimostrare ciò, lavoriamo per induzione sul numero di 0-simplessi  $p \in K_i$  per cui  $l_p > m_p$ . Se tale numero è 0, non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, sia  $p \in K_i$  tale che  $l_p > m_p$ , volendo dimostrare che  $\vdash \bigoplus\{l_q h_q^i : q \in K_i\} \leftrightarrow m_p h_p^i \oplus \bigoplus\{l_q h_q^i : p \neq q \in K_i\}$ . Questo seguirà immediatamente dal Lemma 2.27 appena avremo dimostrato che, per ogni  $q$  tale che  $\langle p, q \rangle \in K_i$ , abbiamo  $l_q \geq m_q$ . Ammettiamo per assurdo che  $\langle p, q \rangle \in K_i$  e  $l_q < m_q$ . Allora  $\mathbf{B}(p) + \mathbf{C}(p) = l_p/m_p > 1$ ,  $\mathbf{A}(p) = 1$ , e  $\mathbf{B}(q) + \mathbf{C}(q) = \mathbf{A}(q) = l_q/m_q < 1$ . Poiché  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$  è lineare su  $\langle p, q \rangle$ , esiste un punto  $r$ , interno al segmento  $\langle p, q \rangle$ , per cui  $\mathbf{A}(r) = (\mathbf{B} + \mathbf{C})(r) = 1$ . Poiché  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B} + \mathbf{C}$  sono entrambe lineari su  $\langle p, q \rangle$ , e coincidono nei due punti distinti  $r$  e  $q$ , coincidono su tutto  $\langle p, q \rangle$ , e questa è una contraddizione. ■

Possiamo adesso dimostrare il teorema di completezza.

**Teorema 2.31** *Sia  $A \in FORM$ . Allora  $\vdash A$  se e soltanto se  $\models A$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $n$  tale che  $A \in FORM_n$ , e supponiamo che  $\mathbf{A} = \mathbf{1}$  in  $M_n$ . Sia  $i$  un indice tale che  $A$  è  $K_i$ -decomponibile. Allora, per il Teorema 2.30 e la precedente discussione sull' unicità degli  $n_p$ , risulta  $A \equiv \bigoplus\{m_p \mathbf{A}(p) h_p^i : p \in K_i\} = \bigoplus\{m_p h_p^i : p \in K_i\}$ . Ma  $K_i$  ha la proprietà (b); quindi  $\vdash \bigoplus\{m_p h_p^i : p \in K_i\}$  per l' Osservazione 2.25, e  $\vdash A$ . ■

**Corollario 2.32**  *$TAUT$  è ricorsivo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Ovviamente  $TAUT$  è ricorsivamente enumerabile. Se abbiamo  $A \in FORM_n$  e  $A \notin TAUT$ , allora esiste  $r \in [0, 1]^n$  con  $\mathbf{A}(r) \neq 1$ . Per la continuità di  $\mathbf{A}$ , possiamo assumere  $r \in (\mathbf{Q} \cap [0, 1])^n$ . Poiché  $(\mathbf{Q} \cap [0, 1])^n$  è ricorsivamente enumerabile,  $FORM_n \setminus TAUT$  è ricorsivamente enumerabile. ■

Di fatto,  $TAUT$  è co-NP completo [Mun87], e quindi decidibile in tempo esponenziale deterministico. Per la Proposizione 2.12(3), l' omomorfismo di MV-algebre

$(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A} : L \rightarrow M$  è iniettivo. Il teorema seguente, la cui dimostrazione originaria è dovuta a McNaughton [McN51], [Mun94], stabilisce che si tratta di un omomorfismo suriettivo.

**Teorema 2.33** *L' omomorfismo  $(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A} : L \rightarrow M$  è suriettivo. Per ogni  $n$ , l' omomorfismo  $(A/\equiv) \mapsto \mathbf{A} : L_n \rightarrow M_n$  è suriettivo.*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare la seconda parte dell' enunciato. Sia  $f \in M_n$ . Per la Proposizione 2.17, esiste un indice  $i$  tale che  $f$  è lineare su ogni semplice di  $K_i$ . Sia  $A = \bigoplus \{m_p f(p) h_p^i : p \in K_i\}$ . Allora  $\mathbf{A}$  ed  $f$  coincidono su ogni vertice di  $K_i$  e, poiché sono entrambe lineari su ogni semplice di  $K_i$ , coincidono su tutto l'  $n$ -cubo. ■

**Corollario 2.34**  *$L$  ed  $M$  sono isomorfe; per ogni  $n$ ,  $L_n$  ed  $M_n$  sono isomorfe.* ■

### 3 Relazioni con gruppi abeliani reticolari

In [Cha59], Chang dimostra il teorema di completezza nella forma data dalla Proposizione 2.12(6). Per stabilire che  $L$  appartiene alla sottovarietà di  $\mathcal{M}$  generata da  $\mathbf{I}$ , mostra innanzitutto che ogni MV-algebra è prodotto sottodiretto di MV-algebre totalmente ordinate. Questo riduce il problema a dimostrare che ogni MV-algebra totalmente ordinata è nella sottovarietà di  $\mathcal{M}$  generata da  $\mathbf{I}$ , ovvero che ogni identità del linguaggio delle MV-algebre valida in  $\mathbf{I}$  è valida in ogni MV-algebra totalmente ordinata. Ora, è noto che:

1. ogni formula universale del linguaggio  $(+, -, 0, \vee, \wedge)$  dei gruppi abeliani totalmente ordinati vera in  $\mathbf{Q}$  è vera in tutti i gruppi abeliani totalmente ordinati.

L'idea fondamentale di Chang è di associare:

2. ad ogni MV-algebra totalmente ordinata  $N$  una coppia  $(G_N, u_N)$ , dove  $G_N$  è un gruppo abeliano totalmente ordinato, e  $u_N$  è un fissato elemento positivo di  $G_N$ ; in particolare, a  $\mathbf{I}$  corrisponde  $(\mathbf{R}, 1)$ ;
3. ad ogni identità  $A = B$  del linguaggio delle MV-algebre con variabili libere  $x_1, \dots, x_n$ , una formula priva di quantificatori  $\varphi_{AB}(x_1, \dots, x_n, y)$  del linguaggio dei gruppi abeliani totalmente ordinati;

in modo tale che:

4.  $N \models \forall x_1 \dots \forall x_n (A = B)$  sse  $G_N \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi_{AB}(x_1, \dots, x_n, u_N)$ .

Ottenuto questo, sia adesso  $A = B$  un'identità del linguaggio delle MV-algebre con variabili libere  $x_1, \dots, x_n$ , sia  $N$  una qualsiasi MV-algebra totalmente ordinata, e supponiamo  $\mathbf{I} \models \forall x_1 \dots \forall x_n (A = B)$ . Abbiamo allora:

$$\mathbf{R} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi_{AB}(x_1, \dots, x_n, 1), \text{ per 2 e 4;}$$

$$\mathbf{Q} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi_{AB}(x_1, \dots, x_n, 1), \text{ perché } \mathbf{Q} \text{ è una sottostruttura di } \mathbf{R};$$

$$\mathbf{Q} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y (0 < y \rightarrow \varphi_{AB}(x_1, \dots, x_n, y)), \text{ perché, per ogni } 0 < c \in \mathbf{Q}, \text{ esiste un automorfismo di } \mathbf{Q} \text{ che mappa } 1 \text{ in } c;$$

$$G_N \models \forall x_1 \dots \forall x_n \forall y (0 < y \rightarrow \varphi_{AB}(x_1, \dots, x_n, y)), \text{ per 1;}$$

$$G_N \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi_{AB}(x_1, \dots, x_n, u_N);$$

$$N \models \forall x_1 \dots \forall x_n (A = B), \text{ per 4.}$$

Ne segue che la validità di  $A = B$  in  $\mathbf{I}$  implica la validità di  $A = B$  in  $N$ , che è quanto volevamo dimostrare.

In [Mun86], Mundici estende la costruzione di  $(G_N, u_N)$  ad MV-algebre arbitrarie.

**Definizione 3.1** Un *gruppo abeliano reticolare* ( $\ell$ -gruppo) è un' algebra  $(G, +, -, 0, \vee, \wedge)$ , dove  $(G, +, -, 0)$  è un gruppo abeliano,  $(G, \vee, \wedge)$  è un reticolo, e vale l'identità  $a + (b \vee c) = (a + b) \vee (a + c)$ . Un  $\ell$ -sottogruppo di  $G$  è una sottoalgebra di  $G$ .

**Proposizione 3.2** [Bir67], [BKW77], [AF88] *In ogni  $\ell$ -gruppo valgono le seguenti:*

1.  $(G, \vee, \wedge)$  è un reticolo distributivo;
2.  $a + (b \wedge c) = (a + b) \wedge (a + c)$ ;
3.  $-(a \vee b) = -a \wedge -b$ ;
4.  $-(a \wedge b) = -a \vee -b$ ;
5.  $a = (a \vee 0) + (a \wedge 0)$ . ■

Usiamo  $\leq$  per denotare l'ordine indotto dalla struttura reticolare. Un' *unità forte* di  $G$  è un elemento  $u > 0$  tale che, per ogni  $a$ , esiste  $n \in \mathbf{N}$  con  $a \leq nu$ .

Siano  $G, H$   $\ell$ -gruppi,  $u$  una fissata unità forte di  $G$ ,  $v$  una fissata unità forte di  $H$ . Un *omomorfismo unitario*  $\varphi : (G, u) \rightarrow (H, v)$  è un omomorfismo  $\varphi : G \rightarrow H$  tale che  $\varphi(u) = v$ .

**Definizione 3.3** La categoria degli  $\ell$ -gruppi con unità forte è la categoria i cui oggetti sono le coppie  $(G, u)$ , dove  $G$  è un  $\ell$ -gruppo e  $u$  è un' unità forte di  $G$ , e i cui morfismi sono gli omomorfismi unitari.

**Proposizione 3.4** [Mun86, Theorem 2.5] *Sia  $(G, u)$  un  $\ell$ -gruppo con unità forte  $u$ . Sia  $\Gamma(G, u)$  la struttura*

$$\Gamma(G, u) = ([0, u], \oplus, \cdot, \neg, 0, 1)$$

*definita come segue:*

$$[0, u] = \{a \in G : 0 \leq a \leq u\};$$

$$a \oplus b = (a + b) \wedge u;$$

$$a \cdot b = (a + b - u) \vee 0;$$

$$\neg a = u - a;$$

$$0 = \text{l' elemento } 0 \text{ di } G;$$

$$1 = u.$$

Allora  $\Gamma(G, u)$  è una MV-algebra, e l'ordine reticolare indotto dalle operazioni MV coincide con l'ordine indotto da  $G$ . Sia  $\varphi : (G, u) \rightarrow (H, v)$  un omomorfismo unitario, e sia  $\Gamma\varphi$  la restrizione di  $\varphi$  a  $[0, u]$ . Allora l'immagine di  $\Gamma\varphi$  è contenuta in  $[0, v]$ , e  $\Gamma\varphi : \Gamma(G, u) \rightarrow \Gamma(H, v)$  è un omomorfismo di MV-algebre. ■

**Osservazione 3.5** Nelle ipotesi della Proposizione 3.4, si dimostra facilmente per induzione che, per  $a_1, \dots, a_k \in \Gamma(G, u)$ , abbiamo:

$$a_1 \oplus \dots \oplus a_k = (a_1 + \dots + a_k) \wedge u;$$

$$a_1 \dots \dots a_k = (a_1 + \dots + a_k - (k-1)u) \vee 0.$$

**Esempio 3.6** L'insieme  $M[0, 1]^n$  di tutte le funzioni di McNaughton su  $[0, 1]^n$  è un  $\ell$ -sottogruppo dell' $\ell$ -gruppo  $\mathbf{R}^{[0, 1]^n}$ , e  $\mathbf{1}$  ne è un'unità forte. Abbiamo  $M_n = \Gamma(M[0, 1]^n, \mathbf{1})$ . Analogamente, l'insieme  $M[0, 1]^\omega$  di tutte le funzioni di McNaughton su  $[0, 1]^\omega$  è un  $\ell$ -gruppo e  $M = \Gamma(M[0, 1]^\omega, \mathbf{1})$ .

**Esempio 3.7** Sia  $\mathbf{Z} \oplus_{\text{lex}} \mathbf{Z}$  il gruppo totalmente ordinato che ha come gruppo sottostante il prodotto diretto di due copie di  $\mathbf{Z}$ , ed è ordinato lessicograficamente:

$$(a, b) \leq (c, d) \text{ se e soltanto se } (a < c \text{ oppure } (a = c \text{ e } b \leq d)).$$

L' MV-algebra  $C = \Gamma(\mathbf{Z} \oplus_{\text{lex}} \mathbf{Z}, (1, 0))$  è detta *algebra di Chang* [Cha58b, p. 474].  $C$  ha come tipo d'ordine due copie "fronteggianti" dei naturali:

$$(0, 0) < (0, 1) < (0, 2) < \dots < (1, -2) < (1, -1) < (1, 0).$$

L'elemento  $(0, 1)$  genera  $C$ , che è quindi un quoziente di  $M_1$ ; cfr. l'Esempio 3.36.

**Teorema 3.8** [Mun86, Theorem 3.9]  $\Gamma$  è un *funtore pieno, fedele e rappresentativo* (ovvero, un'equivalenza categoriale) fra la categoria degli  $\ell$ -gruppi con unità forte e la categoria delle MV-algebre. In particolare, per ogni MV-algebra  $N$ , esiste un unico  $\ell$ -gruppo con unità forte  $(G_N, u_N)$  tale che  $N$  è isomorfa a  $\Gamma(G_N, u_N)$ . Se  $N$  è numerabile,  $G_N$  è numerabile. ■

### 3.1 Gruppi di Riesz

Il Teorema 3.8 consente di importare risultati dalla teoria degli  $\ell$ -gruppi a quella delle MV-algebre, e viceversa. In questa sezione riassumiamo alcune nozioni di base della teoria degli  $\ell$ -gruppi. Poiché le stesse nozioni verranno usate nella Sezione 4.1 ad un livello di generalità maggiore, lavoriamo fin da ora a quest'ultimo livello. Rimandiamo a [Fuc65], [Bir67], [BKW77], [AF88] per maggiori dettagli e dimostrazioni.

Un *gruppo abeliano parzialmente ordinato* è una coppia  $(G, G^+)$ , dove  $G$  è un gruppo abeliano e  $G^+$  è un sottosemiggruppo di  $G$ , generante  $G$  e tale che  $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$ . Scriveremo semplicemente  $G$  per  $(G, G^+)$ . La relazione  $\leq$  su  $G$



indotta da  $(a \leq b$  se e soltanto se  $b - a \in G^+)$  è un ordine parziale invariante per traslazione:  $a \leq b$  implica  $a + c \leq b + c$ . Indichiamo con  $[a, b]$  l'intervallo  $\{c \in G : a \leq c \leq b\}$ .

**Definizione 3.9** Un *gruppo di Riesz* è un gruppo abeliano parzialmente ordinato in cui vale la *proprietà di interpolazione di Riesz*:

per ogni  $a, b, c, d$  tali che  $a, b \leq c, d$ , esiste  $e$  con  $a, b \leq e \leq c, d$ .

**Proposizione 3.10** [Fuc65] *Sia  $G$  un gruppo abeliano parzialmente ordinato. Le seguenti sono equivalenti:*

1. *vale la proprietà di interpolazione di Riesz;*
2. *se  $0 \leq a \leq b_1 + \dots + b_n$ , allora esistono  $c_1, \dots, c_n$  con  $0 \leq c_i \leq b_i$  e  $a = c_1 + \dots + c_n$ ;*
3.  $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ . ■

Se non altrimenti specificato, per il resto di questa sezione indichiamo con  $G$  un generico gruppo di Riesz. Ogni  $\ell$ -gruppo è un gruppo di Riesz. Sia  $(X, \leq)$  un insieme parzialmente ordinato,  $Y \subseteq X$ . Diciamo che  $Y$  è *convesso* in  $X$  se, per ogni  $a, b \in Y$  ed ogni  $c \in X$  tali che  $a \leq c \leq b$ , abbiamo  $c \in Y$ . Sia  $H$  un sottogruppo di  $G$ , e sia  $H^+ = H \cap G^+$ .  $H$  è un *ideale* di  $G$  se è convesso in  $G$  ed è generato da  $H^+$ ; nel caso in cui  $G$  è un  $\ell$ -gruppo, questo equivale a dire che  $H$  è un  $\ell$ -sottogruppo di  $G$  convesso in  $G$ . Una *faccia* di  $G^+$  è un sottosemigruppato di  $G^+$ , contenente  $0$  e convesso un  $G^+$ . Indichiamo con *Faces  $G^+$* , *Ideals  $G$*  gli insiemi delle facce di  $G^+$  e degli ideali di  $G$ , parzialmente ordinati per inclusione. L'applicazione  $H \mapsto H^+ : \text{Ideals } G \rightarrow \text{Faces } G^+$  è un isomorfismo d'ordine, il cui inverso è  $F \mapsto F - F = \{a - b : a, b \in F\} : \text{Faces } G^+ \rightarrow \text{Ideals } G$ . *Faces  $G^+$*  è chiuso per intersezioni arbitrarie e ha massimo  $G^+$ ; costituisce quindi un reticolo completo. Di conseguenza, *Ideals  $G$*  è pure un reticolo completo.

Sia  $X \subseteq G^+$ ; la faccia generata da  $X$  è  $\langle X \rangle^+ = \bigcap \{F \in \text{Faces } G^+ : X \subseteq F\} = \{a \in G^+ : \text{esistono } b_1, \dots, b_n \in X \text{ con } 0 \leq a \leq b_1 + \dots + b_n\}$ . L'ideale generato da  $X$  è  $\langle X \rangle = \langle X \rangle^+ - \langle X \rangle^+ = \{a \in G : \text{esistono } b_1, \dots, b_n \in X \text{ con } -(b_1 + \dots + b_n) \leq a \leq b_1 + \dots + b_n\}$ . Se  $X = \{a\}$ , scriviamo  $\langle a \rangle^+$  e  $\langle a \rangle$  per  $\langle \{a\} \rangle^+$  e  $\langle \{a\} \rangle$ . Come in un  $\ell$ -gruppo, un' *unità forte* è un elemento  $u \in G^+$  tale che  $\langle u \rangle = G$ .

Sia  $H \in \text{Ideals } G$ . Ordiniamo  $G/H$  ponendo  $a/H \leq b/H$  se e soltanto se esiste  $c \in H$  con  $a \leq b + c$ ; equivalentemente, definiamo  $(G/H)^+ = G^+/H$ . Se  $G$  è un gruppo di Riesz ( $\ell$ -gruppo), sia  $H$  che  $G/H$  sono gruppi di Riesz ( $\ell$ -gruppi). L'omomorfismo naturale  $\varphi : G \rightarrow G/H$  è *positivo* (ovvero,  $a \leq b$  implica  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ ) e, se  $G$  è un  $\ell$ -gruppo, è un omomorfismo di  $\ell$ -gruppi (ovvero, preserva  $\vee$  e  $\wedge$ ).

Se  $G$  è un  $\ell$ -gruppo, valgono le solite relazioni fra ideali, congruenze, e controimmagini dello  $0$  sotto omomorfismi di  $\ell$ -gruppi.

**Esempio 3.11** Sia  $C[0, 1]$  l'insieme delle funzioni continue a valori reali su  $[0, 1]$ . Allora  $C[0, 1]$  è un  $\ell$ -gruppo, con le operazioni definite per componenti. Ogni  $f \in C[0, 1]$  tale che  $f(u) > 0$  per ogni  $u \in [0, 1]$  ne è un'unità forte.

**Esempio 3.12** Sia  $C_1[0, 1]$  il sottogruppo di  $C[0, 1]$  i cui elementi sono le funzioni differenziabili, con l'ordine indotto. Allora  $C_1[0, 1]$  non è convesso in  $C[0, 1]$ .  $C_1[0, 1]$  è un gruppo di Riesz, ma non è un  $\ell$ -gruppo.

Ideals  $G$  è un reticolo completo, algebrico e distributivo [Fuc65], [AF88]. I meets finiti sono dati dall'intersezione, mentre, se  $\{H_j : j \in J\}$  è una famiglia infinita di ideali, allora  $\bigwedge_{j \in J} H_j = \langle \bigcap_{j \in J} H_j^+ \rangle$ . Se  $G$  è un  $\ell$ -gruppo, allora  $\bigwedge_{j \in J} H_j = \bigcap_{j \in J} H_j$ . I joints, sia finiti che infiniti, sono dati dalla somma diretta:  $\bigvee_{j \in J} H_j = \sum_{j \in J} H_j =$  (sottogruppo generato da  $\bigcup_{j \in J} H_j$ ). Inoltre, per  $K \in \text{Ideals } G$ , abbiamo  $K \wedge (\bigvee H_j) = \bigvee (K \wedge H_j)$ .

Sia  $H \in \text{Ideals } G$ ,  $H \neq G$ . Diciamo che  $H$  è *primo* se è finitamente meet-irriducibile in  $\text{Ideals } G$ , ovvero  $H = K_1 \cap K_2$  implica ( $H = K_1$  oppure  $H = K_2$ ). Diciamo che  $H$  è *massimale* se non è contenuto propriamente in alcun ideale proprio.

Un insieme parzialmente ordinato è un *antireticolo* [Fuc65] se ha solo i meets che non può non avere; più precisamente,  $(X, \leq)$  è un antireticolo se, per ogni  $a, b \in X$  per cui  $a \wedge b$  esiste, abbiamo  $a \leq b$  oppure  $b \leq a$ .

**Proposizione 3.13** [Fuc65, Lemma 7.1, Theorem 10.1], [BKW77, Théorème 2.4.1] Sia  $G$  un gruppo di Riesz,  $H$  un suo ideale proprio. Le seguenti sono equivalenti:

1.  $H$  è primo;
2. se  $K_1, K_2 \in \text{Ideals } G$  e  $K_1 \cap K_2 \subseteq H$ , allora  $K_1 \subseteq H$  oppure  $K_2 \subseteq H$ ;
3.  $G^+ \setminus H^+$  è direttato inferiormente;
4.  $G/H$  è un antireticolo.

Se inoltre  $G$  è un  $\ell$ -gruppo, allora ciascuna delle condizioni precedenti è equivalente a ciascuna delle seguenti:

5. se  $a \wedge b \in H^+$ , allora  $a \in H^+$  oppure  $b \in H^+$ ;
6. se  $a \wedge b = 0$ , allora  $a \in H$  oppure  $b \in H$ ;
7.  $G/H$  è totalmente ordinato;
8.  $\{K \in \text{Ideals } G : H \subseteq K\}$  è totalmente ordinato. ■

**Proposizione 3.14** Sia  $G$  un gruppo di Riesz,  $H \in \text{Ideals } G$ . Allora  $H = \bigwedge \{K \in \text{Ideals } G : K \text{ è primo e } H \subseteq K\}$ .

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare che  $H^+ = \bigcap \{K^+ : K \text{ è un ideale primo e } H^+ \subseteq K^+\}$ , e questo segue facilmente dal Lemma di Zorn. ■

**Corollario 3.15** *Ogni gruppo di Riesz è prodotto sottodiretto di gruppi di Riesz in cui l'ordine è antireticolare. Ogni  $\ell$ -gruppo è prodotto sottodiretto di gruppi totalmente ordinati.* ■

Indichiamo con  $\text{Spec } G$  l'insieme degli ideali primi di  $G$ , dotato della topologia di Zariski, i cui aperti sono gli  $O_H = \{p \in \text{Spec } G : H \not\subseteq p\}$ , per  $H \in \text{Ideals } G$ .  $\text{MaxSpec } G$  è l'insieme degli ideali massimali di  $G$ , dotato della topologia indotta da  $\text{Spec } G$ .

Per  $X \subseteq G^+$ , sia  $O_X = \{p \in \text{Spec } G : X \not\subseteq p\}$ , e sia  $F_X = \{p \in \text{Spec } G : X \subseteq p\}$ . Consideriamo la connessione di Galois fra  $G^+$  e  $\text{Spec } G$  indotta dalla relazione di appartenenza. Per  $X \subseteq G^+$ , sia  $X' = \{p \in \text{Spec } G : a \in p \text{ per ogni } a \in X\} = F_X$ , e per  $P \subseteq \text{Spec } G$ , sia  $P' = \{a \in G^+ : a \in p \text{ per ogni } p \in P\} = \bigcap \{p^+ : p \in P\}$ . Per la Proposizione 3.14,  $X'' = \langle X \rangle^+$ , mentre  $P''$  è la chiusura topologica di  $P$ .

Per le proprietà delle connessioni di Galois,  $\text{Faces } G^+$  (e quindi  $\text{Ideals } G$ ) è antiisomorfo al reticolo dei chiusi di  $\text{Spec } G$ , e isomorfo al reticolo degli aperti. L'antiisomorfismo con  $\text{Ideals } G$  è dato da  $H \mapsto F_H$ , e l'isomorfismo da  $H \mapsto O_H$ . Poiché  $X''' = X'$ , abbiamo  $F_X = F_{\langle X \rangle^+}$  e  $O_X = O_{\langle X \rangle^+}$ . Se  $X = \{a\}$ , scriviamo  $O_a$  e  $F_a$  per  $O_X$  e  $F_X$ . Un ideale  $H$  di  $G$  è *principale* se esiste  $a \in G^+$  con  $H = \langle a \rangle$ ; analogamente, una faccia  $F$  di  $G^+$  è *principale* se  $F = \langle a \rangle^+$ .

**Proposizione 3.16** *Gli aperti compatti di  $\text{Spec } G$  corrispondono agli ideali principali di  $G$  (ovvero, sono esattamente gli  $O_a$ , per  $a \in G^+$ ). Essi formano una base per  $\text{Spec } G$ .*

DIMOSTRAZIONE. Ogni aperto di  $\text{Spec } G$  è della forma  $O_I$ , per qualche  $I \in \text{Ideals } G$ . Ovviamente  $I = \bigvee \{\langle a \rangle : a \in I^+\}$ . Per l'isomorfismo citato sopra, abbiamo  $O_I = O_{\bigvee \{\langle a \rangle : a \in I^+\}} = \bigcup \{O_a : a \in I^+\}$ . Questo dimostra la seconda affermazione.

Sia  $O_a \subseteq \bigcup \{O_{I_t} : t \in T\}$ ; allora  $\langle a \rangle \subseteq \bigvee \{I_t : t \in T\} = \sum \{I_t : t \in T\}$ . Esistono quindi  $t_1, \dots, t_n \in T$  e  $a_{t_1} \in I_{t_1}, \dots, a_{t_n} \in I_{t_n}$  tali che  $a = a_{t_1} + \dots + a_{t_n}$ . Quindi  $\langle a \rangle \subseteq I_{t_1} + \dots + I_{t_n}$  e  $O_a \subseteq O_{I_{t_1}} \cup \dots \cup O_{I_{t_n}}$ .

Viceversa, assumiamo che  $O_I$  sia compatto. Poiché  $O_I = \bigcup \{O_a : a \in I^+\}$ , esistono  $a_1, \dots, a_n \in I^+$  tali che  $O_I = O_{a_1} \cup \dots \cup O_{a_n}$ . È sufficiente adesso dimostrare che  $O_{a_1} \cup \dots \cup O_{a_n} = O_{a_1 + \dots + a_n}$ , ovvero che  $\langle a_1 \rangle^+ + \dots + \langle a_n \rangle^+ = \langle a_1 + \dots + a_n \rangle^+$ . L'inclusione  $\subseteq$  è ovvia. Sia  $b \in \langle a_1 + \dots + a_n \rangle^+$ . Allora, per qualche  $m \in \mathbf{N}$ , abbiamo  $0 \leq b \leq m(a_1 + \dots + a_n) = ma_1 + \dots + ma_n$ . Per la Proposizione 3.10(2), esistono  $0 \leq c_1 \leq ma_1, \dots, 0 \leq c_n \leq ma_n$  con  $b = c_1 + \dots + c_n$ . Osservando che  $c_i \in \langle a_i \rangle^+$ , ne segue l'inclusione  $\supseteq$  (cfr. il Lemma 4.13). ■

**Corollario 3.17**  *$\text{Spec } G$  è compatto se e soltanto se  $G$  ha un'unità forte.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $u$  è un'unità forte di  $G$ , allora  $\text{Spec } G = O_u$ , che è compatto. Viceversa, se  $\text{Spec } G$  è compatto, deve essere  $\text{Spec } G = O_a$  per qualche  $a \in G^+$ . Ne segue che, per ogni  $p \in \text{Spec } G$ ,  $a \notin p$ . Questo implica che  $a$  è un'unità forte. Infatti, se  $\langle a \rangle$  fosse diverso da  $G$ , per la Proposizione 3.14 esisterebbe un ideale primo di  $G$  contenente  $a$ . ■

Un chiuso di uno spazio topologico è *irriducibile* se non può venire espresso come unione non banale di due chiusi. Uno spazio è *sobrio* se ogni irriducibile è la chiusura di un punto; uno *spazio spettrale* è uno spazio  $T_0$ , sobrio, e avente una base numerabile di compatti aperti.

**Proposizione 3.18** *Se  $G$  è numerabile,  $\text{Spec } G$  è uno spazio spettrale. Ogni spazio spettrale è omeomorfo a  $\text{Spec } G$ , per qualche gruppo di Riesz  $G$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per la Proposizione 3.14, punti distinti di  $\text{Spec } G$  hanno chiusure distinte, e quindi  $\text{Spec } G$  è  $T_0$ . Sia  $F_I$  un chiuso irriducibile di  $\text{Spec } G$ . Per l'antiisomorfismo fra chiusi di  $\text{Spec } G$  e ideali di  $G$ , questo significa che  $I$  non può venire espresso in modo non banale come intersezione di due ideali di  $G$ , ovvero che  $I$  è irriducibile. Quindi  $I$  è un punto di  $\text{Spec } G$ , e  $F_I$  è la sua chiusura.  $\text{Spec } G$  ha una base numerabile di aperti compatti per la Proposizione 3.16. L'ultima affermazione segue da [BE78, Theorem 5]. ■

## 3.2 Ideali delle MV-algebre

Sia  $N$  una MV-algebra. Un *ideale* di  $N$  è un sottoinsieme  $I$  di  $N$  contenente  $0$ , chiuso per  $\oplus$ , e tale che  $a \leq b \in I$  implica  $a \in I$ . Dualmente, un *filtro* di  $N$  è un sottoinsieme  $F$  di  $N$  contenente  $1$ , chiuso per  $\cdot$ , e tale che  $a \geq b \in F$  implica  $a \in F$ .

**Proposizione 3.19** *Sia  $F$  un sottoinsieme della MV-algebra  $N$ . Allora  $F$  è un filtro se e soltanto se ( $1 \in F$  e, se  $a, a \rightarrow b \in F$ , allora  $b \in F$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $F$  sia un filtro e che  $a, a \rightarrow b \in F$ . Allora  $a \wedge b = a \cdot \neg(a \cdot \neg b) = a \cdot (\neg a \oplus b) \in F$  e  $b \in F$ . Per il viceversa, supponiamo  $a \geq b \in F$ . Per la Proposizione 2.10(4),  $b \rightarrow a = 1 \in F$  e  $a \in F$ . La chiusura di  $F$  sotto  $\cdot$  risulta dalla validità in ogni MV-algebra di  $a \rightarrow (b \rightarrow a \cdot b) = 1$  (per  $\mathbb{L}2$ ,  $1 = (1 \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow \neg b) \rightarrow (1 \rightarrow \neg b)) = a \rightarrow (b \rightarrow \neg(a \rightarrow \neg b)) = a \rightarrow (b \rightarrow a \cdot b)$ ). ■

È facile verificare che  $I \subseteq N$  è un ideale (filtro) se e soltanto se  $\neg I = \{\neg a : a \in I\}$  è un filtro (ideale). Indichiamo con  $\text{Ideals } N$  e  $\text{Filters } N$  gli insiemi parzialmente ordinati per inclusione degli ideali e dei filtri di  $N$ , rispettivamente. Essendo entrambi chiusi per intersezioni arbitrarie, e contenendo entrambi  $N$  come elemento massimo, costituiscono due reticoli completi, isomorfi tramite  $\neg$ .

Valgono le solite relazioni fra ideali, filtri, congruenze, controimmagini dello  $0$  e dell'  $1$  sotto omomorfismi. In particolare:

1.  $I \in \text{Ideals } N$  induce la congruenza  $\sim_I$  tramite

$$a \sim_I b \text{ se e soltanto se } a \leftrightarrow b \in \neg I;$$

2.  $F \in \text{Filters } N$  induce la congruenza  $\sim_F$  tramite

$$a \sim_F b \text{ se e soltanto se } a \leftrightarrow b \in F;$$

3. la classe dello 0 di una congruenza è un ideale, e quella dell' 1 un filtro.

Indichiamo con  $a/I, a/F$  le classi di equivalenza di  $a \in N$  sotto  $\sim_I, \sim_F$ , rispettivamente, e con  $N \rightarrow N/I, N \rightarrow N/F$  gli epimorfismi naturali associati.  $\text{Ideals } N/I$  e  $\{J \in \text{Ideals } N : I \subseteq J\}$  sono naturalmente isomorfi.

Sia  $X \subseteq N$ . Indichiamo con  $\overline{X} = \bigcap \{F \in \text{Filters } N : X \subseteq F\}$  il filtro generato da  $X$ . Per la Proposizione 3.19, questa notazione è consistente con quella introdotta a pagina 9. È facile dimostrare che  $\overline{X} = \{a \in N : \text{esistono } b_1, \dots, b_n \in X \text{ con } a \geq b_1 \cdot \dots \cdot b_n\}$ . Analogamente, indichiamo con  $\underline{X}$  l'ideale generato da  $X$ , ovvero  $\underline{X} = \bigcap \{I \in \text{Ideals } N : X \subseteq I\} = \{a \in N : \text{esistono } b_1, \dots, b_n \in X \text{ con } a \leq b_1 \oplus \dots \oplus b_n\}$ . Scriviamo  $\overline{a}, \underline{a}$  per  $\overline{\{a\}}, \underline{\{a\}}$ . Un filtro (ideale) *principale* è un filtro (ideale) della forma  $\overline{a}$  ( $\underline{a}$ ).

**Proposizione 3.20** *Sia  $(G, u)$  un  $\ell$ -gruppo con unità forte  $u$ ,  $N = \Gamma(G, u)$ . Allora  $\text{Ideals } G$  e  $\text{Ideals } N$  sono isomorfi tramite l'isomorfismo  $H \mapsto H \cap [0, u] : \text{Ideals } G \rightarrow \text{Ideals } N$ , il cui inverso è  $I \mapsto \langle I \rangle : \text{Ideals } N \rightarrow \text{Ideals } G$ . In questo isomorfismo gli ideali principali di  $G$  e di  $N$  si corrispondono.*

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che le applicazioni  $F \mapsto F \cap [0, u] : \text{Faces } G^+ \rightarrow \text{Ideals } N$  e  $I \mapsto \langle I \rangle^+ : \text{Ideals } N \rightarrow \text{Faces } G^+$  sono isomorfismi d'ordine, l'uno inverso dell'altro. Ambedue le applicazioni preservano l'ordine. È facile vedere che i codomini sono quelli indicati, che  $\langle F \cap [0, u] \rangle^+ \subseteq F$ , e che  $I \subseteq \langle I \rangle^+ \cap [0, u]$ . Sia  $a \in F \in \text{Faces } G^+$ . Poiché  $u$  è un'unità forte e vale la Proposizione 3.10(2), esistono  $c_1, \dots, c_n$  con  $0 \leq c_i \leq u$  e  $a = c_1 + \dots + c_n$ . Poiché  $c_i \leq a \in F$ , abbiamo  $c_1, \dots, c_n \in F \cap [0, u]$  e  $a \in \langle F \cap [0, u] \rangle^+$ . Sia  $a \in \langle I \rangle^+ \cap [0, u]$ . Allora esistono  $b_1, \dots, b_n \in I$  con  $0 \leq a \leq b_1 + \dots + b_n$ . Come sopra, esistono  $c_1, \dots, c_n \in I$  con  $a = c_1 + \dots + c_n$ . Abbiamo quindi  $a = a \wedge u = (c_1 + \dots + c_n) \wedge u = c_1 \oplus \dots \oplus c_n \in I$ . Ovviamente gli ideali principali di  $G$  corrispondono alle facce principali di  $G^+$ . Se  $a$  genera  $I \in \text{Ideals } N$ , allora è chiaro che  $a$  genera  $\langle I \rangle^+$ . Se  $a$  genera  $F \in \text{Faces } G^+$ , allora  $a \wedge u$  genera  $F \cap [0, u]$ . Infatti, sia  $b \in F \cap [0, u]$ , e sia  $n \in \mathbf{N}$  tale che  $b \leq na$ . Allora, per la Proposizione 3.2(2),

$$\underbrace{(a \wedge u) \oplus \dots \oplus (a \wedge u)}_{n \text{ addendi}} = (n(a \wedge u)) \wedge u = \left( \bigwedge_{0 \leq j \leq n} \binom{n}{j} [(n-j)a + ju] \right) \wedge u \geq b$$

e quindi  $b$  appartiene all' ideale generato da  $a \wedge u$ . ■

Sia  $a$  un elemento dell'  $\ell$ -gruppo  $(G, u)$ . Il *valore assoluto* di  $|a|$  di  $a$  è  $|a| = a \vee (-a) = (a \vee 0) - (a \wedge 0) \geq 0$ . Se  $H \in \text{Ideals } G$ , allora  $a \in H$  se e soltanto se  $|a| \in H$ . Per [BKW77, 1.3.12],  $|a - b| = (a \vee b) - (a \wedge b)$ . Quindi, per  $a, b \in [0, u]$ , abbiamo  $|a - b| \in [0, u]$ , ed è facile dimostrare che  $|a - b| = \neg(a \leftrightarrow b)$ .

**Proposizione 3.21** *Nelle ipotesi della Proposizione 3.20, siano  $H \in \text{Ideals } G$ ,  $I \in \text{Ideals } N$  in corrispondenza. Allora  $N/I$  e  $\Gamma(G/H, u/H)$  sono isomorfe tramite l' isomorfismo  $a/I \mapsto a/H$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $a, b \in [0, u]$ . Allora  $a - b \in H$  se e soltanto se  $|a - b| \in H$  se e soltanto se  $\neg(a \leftrightarrow b) \in I$ . Ne segue che l' applicazione  $a/I \mapsto a/H$  è ben definita ed iniettiva. Sia  $b/H \in \Gamma(G/H, u/H)$ . Per [Fuc65, Proposition 5.7], esiste  $a \in [0, u]$  con  $a/H = b/H$ , e l' applicazione è suriettiva. È banale verificare che preserva le operazioni MV. ■

Le definizioni di ideale *primo* e *massimale* di una MV-algebra sono analoghe a quelle date a pagina 37 per un gruppo di Riesz. Ovviamente, sotto l' isomorfismo della Proposizione 3.20, gli ideali primi (massimali) di  $G$  corrispondono agli ideali primi (massimali) di  $N$ . Per ogni MV-algebra  $N$ , gli spazi topologici  $\text{Spec } N$  e  $\text{MaxSpec } N$  sono definiti in completa analogia al caso dei gruppi di Riesz. Per la Proposizione 3.18,  $\text{Spec } N$  è uno spazio spettrale. È un problema aperto caratterizzare topologicamente gli spazi spettrali delle MV-algebre (equivalentemente, degli  $\ell$ -gruppi con unità forte [EM93]).

**Proposizione 3.22** *Sia  $I$  un ideale della MV-algebra  $N$ .*

1. *Le seguenti sono equivalenti:*

- a.  *$I$  è primo;*
- b. *per ogni  $a, b \in N$ ,  $\neg a \cdot b \in I$  oppure  $a \cdot \neg b \in I$ ;*
- c.  *$a \wedge b \in I$  implica  $a \in I$  oppure  $b \in I$ ;*
- d.  *$N/I$  è totalmente ordinata;*
- e.  *$\{J \in \text{Ideals } N : I \subseteq J\}$  è totalmente ordinato.*

2. *Le seguenti sono equivalenti:*

- f.  *$I$  è massimale;*
- g. *se  $a \notin I$ , allora esiste  $k \in \mathbf{N}$  tale che  $\neg a \cdot \neg a \cdot \dots \cdot \neg a \in I$  ( $k$  fattori);*
- h.  *$N/I$  è isomorfa ed una sottoalgebra di  $\mathbf{I}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'equivalenza a–d è in [Cha59]; quella con e segue dalle Proposizioni 3.13 e 3.20. f–h sono equivalenti per [Cha58b, Theorem 4.7] e [Cha59, p. 78]. ■

Sia  $\varphi : N \rightarrow Q$  un omomorfismo di MV-algebre. Dalle condizioni c e g della Proposizione 3.22 è facile verificare che, se  $I$  è un ideale primo (massimale) di  $Q$ , allora  $\varphi^{-1}(I)$  è un ideale primo (massimale) di  $N$ . Ne segue facilmente che  $\text{Spec}$  e  $\text{MaxSpec}$  sono funtori controvarianti dalla categoria della MV-algebre a quella degli spazi topologici con funzioni continue. Notiamo che, se  $\varphi$  è un omomorfismo non unitario di  $\ell$ -gruppi, allora la controimmagine di un ideale massimale non necessariamente è un ideale massimale. Dalla Proposizione 3.14 e dal Corollario 3.15, otteniamo:

**Proposizione 3.23** *Ogni ideale di una MV-algebra è intersezione di ideali primi.* ■

**Corollario 3.24** [Cha59] *L'omomorfismo  $a \mapsto (a/p)_{p \in \text{Spec } N} : N \rightarrow \prod \{N/p : p \in \text{Spec } N\}$  è iniettivo. Ogni MV-algebra è prodotto sottodiretto di MV-algebre totalmente ordinate.* ■

**Definizione 3.25** Sia  $N$  una MV-algebra.  $N$  è:

- semplice*, se  $\{0\}$  è il suo unico ideale proprio;
- semisemplice*, se l'intersezione dei suoi ideali massimali è  $\{0\}$ ;
- iperarchimedeo*, se  $N$  e tutti i suoi quozienti sono semisemplici (ovvero ogni ideale di  $N$  è intersezione di massimali);
- completa*, se ogni sottoinsieme di  $N$  ha un sup e un inf.

**Teorema 3.26** *Sia  $N$  una MV-algebra.*

1. *Le seguenti sono equivalenti:*
  - a.  $N$  è semplice;
  - b. per ogni  $0 \neq a \in N$ , esiste  $n \in \mathbf{N}$  tale che  $na = 1$ ;
  - c.  $N$  è una sottoalgebra di  $\mathbf{I}$ .
2. *Le seguenti sono equivalenti:*
  - d.  $N$  è iperarchimedeo;
  - e. ideali primi e massimali di  $N$  coincidono.
3. *Le seguenti sono equivalenti:*
  - f.  $N$  è semisemplice;

- g.  $N$  è prodotto sottodiretto di sottoalgebre di  $\mathbf{I}$ ;
- h.  $N$  può essere immersa in una MV-algebra completa;
- i. per ogni  $a, b$  per cui  $a, a \oplus a, a \oplus a \oplus a, \dots \leq b$ , abbiamo  $a \cdot b = a$ ;
- l. per ogni  $a$  per cui  $a, a \oplus a, a \oplus a \oplus a, \dots \leq \neg a$ , abbiamo  $a = 0$ .

4. Ciascuna delle condizioni a, d, f implica la successiva e non ne è implicata.

5. Se  $N$  è totalmente ordinata, tutte le condizioni a-l sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE.  $a \iff b$ . [Cha58b, p. 485].

$b \iff c$ . [Cha59, p. 78].

$a \implies d$ . Ovvio.

$d \implies e$ . Sia  $p$  un ideale primo di  $N$ . Per la Proposizione 3.22, esiste esattamente un ideale massimale che contiene  $p$ . Quindi  $p$  coincide con quel massimale.

$e \implies d, f$ . Proposizione 3.23.

$f \iff g$ . Ovvio, considerando l'equivalenza fra  $a$  e  $c$ .

$g \implies h$ . Ovvio.

$h \implies i$ . [Kaw94, Theorem 1].

$i \implies l$ . Ovvio.

$l \implies f$ . Sia  $a \in \bigcap \{m : m \in \text{MaxSpec } N\}$ . Dimostriamo che  $a, a \oplus a, a \oplus a \oplus a, \dots \leq \neg a$ . Se così non fosse, per il Corollario 3.24, esisterebbero  $k \in \mathbf{N}$  e  $p \in \text{Spec } N$  tali che  $(\neg a)/p < ka/p$  in  $N/p$ . Sia  $p \subseteq m \in \text{MaxSpec } N$ . Allora  $1/m = (\neg a)/m \leq ka/m = 0/m$  in  $N/m$ , e questo è assurdo. Ne segue che  $a = 0$ , e  $N$  è semisemplice.

4. L'algebra  $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$  è iperarchimedeo, ma non semplice. L'algebra di Chang dell'Esempio 3.7 ha come unici ideali propri  $\{(0, 0)\}$  ed il massimale generato da  $(0, 1)$ ; non è quindi semisemplice. Poiché è un quoziente di  $M_1$ , ne segue che  $M_1$  è semisemplice per la condizione  $g$ , ma non iperarchimedeo.

5. Assumiamo che  $N$  sia totalmente ordinata e semisemplice. Allora, per la Proposizione 3.22,  $\{0\}$  è contenuto in un unico ideale massimale e, essendo  $N$  semisemplice, coincide con quel massimale. ■

**Osservazione 3.27** Un  $\ell$ -gruppo  $G$  è archimedeo se, per ogni  $a, b \in G^+$  tali che  $a, a + a, a + a + a, \dots \leq b$ , abbiamo  $a = 0$ . Questa è una condizione più debole dell'essere rappresentabile come prodotto sottodiretto di  $\ell$ -sottogruppi di  $\mathbf{R}$  (i controesempi sono non banali [AF88, E21, E27]). Viceversa, in una MV-algebra, la semisemplicità è equivalente alla condizione  $i$  del Teorema 3.26. Ora,  $(G, u)$  è archimedeo se e soltanto se  $\Gamma(G, u)$  soddisfa la condizione  $i$ , ed è rappresentabile come prodotto sottodiretto di  $\ell$ -sottogruppi di  $\mathbf{R}$  se e soltanto se  $\Gamma(G, u)$  è semisemplice [Kaw94]. Ne segue che un  $\ell$ -gruppo archimedeo e con unità forte è rappresentabile [BKW77, Corollaire 13.2.6]. Anche qui, come nella possibilità di introdurre il funtore  $\text{MaxSpec}$ , la presenza di un'unità forte in un  $\ell$ -gruppo comporta una significativa differenza.



**Definizione 3.28** Sia  $I \in \text{Ideals } N$ . Il radicale di  $I$  è  $\sqrt{I} = \bigcap \{m \in \text{MaxSpec } N : I \subseteq m\}$ .

Ovviamente  $N/\sqrt{I}$  è il più piccolo quoziente semisemplice di  $N/I$  (nel senso che ogni quoziente semisemplice di  $N/I$  fattorizza attraverso  $N/\sqrt{I}$ ).

**Proposizione 3.29**  $\sqrt{I} = \{a : a \cdot (ka) \in I \text{ per ogni } k \in \mathbf{N}\}$ .

DIMOSTRAZIONE.  $\subseteq$ . Sia  $k$  tale che  $a \cdot (ka) \notin I$ , e sia  $I \subseteq p \in \text{Spec } N$  tale che  $a \cdot (ka) \notin p$ . Per la Proposizione 3.22(b),  $\neg a \cdot \neg(ka) \in p$ . Sia  $m$  un ideale massimale contenente  $p$ . Allora  $a \notin m$ . Infatti, se fosse  $a \in m$ , sarebbe  $1 = (k+1)a \oplus (\neg a \cdot \neg(ka)) \in m$ .

$\supseteq$ . Sia  $a \cdot a, a \cdot (a \oplus a), a \cdot (a \oplus a \oplus a), \dots \in I \subseteq m \in \text{MaxSpec } N$ . Allora

$$\frac{\neg a \oplus \neg a}{m} = \frac{\neg a \oplus \neg(a \oplus a)}{m} = \frac{\neg a \oplus \neg(a \oplus a \oplus a)}{m} = \dots = \frac{1}{m}$$

e, per la Proposizione 2.10(4),

$$\frac{a}{m}, \frac{a \oplus a}{m}, \frac{a \oplus a \oplus a}{m}, \dots \leq \frac{\neg a}{m}.$$

Poiché  $N/m$  è semplice, vale la condizione  $l$  del Teorema 3.26, e quindi  $a \in m$ . ■

### 3.3 MV-algebre libere

In questa sezione riprendiamo in esame le MV-algebre libere  $M_n$  e  $M$ . Introduciamo alcune definizioni e rivediamo brevemente la nostra notazione. In quanto segue,  $\kappa$  varierà nell'insieme  $\{1, 2, 3, \dots, \omega\}$ . Poniamo  $FORM_\omega = FORM$  e  $M_\omega = M$ . Scrivendo quindi, per esempio, che per ogni  $1 \leq \kappa \leq \omega$ , in  $M_\kappa$  vale la proprietà  $\Pi$ , intendiamo: in  $M$  vale  $\Pi$  e, per ogni intero  $n \geq 1$ , in  $M_n$  vale  $\Pi$ . Identifichiamo  $A \in FORM_\kappa$  con la corrispondente funzione di McNaughton  $\mathbf{A} \in M_\kappa$ . Per  $U \subseteq [0, 1]^\kappa$ , indichiamo con  $A|U$  la restrizione di  $A$  ad  $U$ , e con  $M_\kappa|U$  l'algebra  $\{A|U : A \in M_\kappa\}$ .

**Proposizione 3.30** [Mun86, Proposition 8.1] *La funzione  $r \mapsto \{A \in M_\kappa : A(r) = 0\}$  è un omeomorfismo di  $[0, 1]^\kappa$  in  $\text{MaxSpec } M_\kappa$ .* ■

Per la Proposizione 3.30, identifichiamo  $[0, 1]^\kappa$  con  $\text{MaxSpec } M_\kappa$ , scrivendo indifferentemente  $A(r) = 0$  e  $A \in r$ ; denotiamo il filtro massimale  $\{A \in M_\kappa : A(r) = 1\}$  con  $\neg r$ . Nella connessione di Galois introdotta a pagina 4, quozientiamo  $FORM_\kappa$  per  $\equiv$ , ottenendo una connessione fra  $M_\kappa$  e  $[0, 1]^\kappa$ . Introduciamo una seconda connessione fra  $M_\kappa$  e  $[0, 1]^\kappa$  considerando la relazione  $A(r) = 0$ ; indichiamo con  $\iota : \mathcal{P}(FORM_\kappa) \rightarrow \mathcal{P}([0, 1]^\kappa)$  e  $\iota' : \mathcal{P}([0, 1]^\kappa) \rightarrow \mathcal{P}(FORM_\kappa)$  le applicazioni determinate da questa seconda connessione. Per  $A \in M_\kappa$ , definiamo  $0\text{-set}(A) = \{A\}_\iota = \{r \in [0, 1]^\kappa : A(r) = 0\}$  e  $1\text{-set}(A) = \{A\}' = \{r \in [0, 1]^\kappa : A(r) = 1\}$ .

Sia  $I \in \text{Ideals } M_\kappa$ . Con le convenzioni introdotte,  $I_\iota = \{A \in M_\kappa : A(r) = 0 \text{ per ogni } r \in I\} = \{A \in M_\kappa : A \in r \text{ per ogni } r \text{ tale che } I \subseteq r\} = \sqrt{I}$ . Dualmente, per  $F \in \text{Filters } M_\kappa$ ,  $F'' = \bigcap \{\neg r : \neg r \text{ è un filtro massimale estendente } F\} = \neg\sqrt{\neg F}$ .

**Proposizione 3.31** [Mun86, Proposition 4.17] *Sia  $1 \leq \kappa \leq \omega$ , sia  $U \neq \emptyset$  un chiuso di  $[0, 1]^\kappa$ , e sia  $r \in [0, 1]^\kappa \setminus U$ . Allora esiste  $A \in M_\kappa$  con  $A|U = 1$  e  $A(r) = 0$ . ■*

**Corollario 3.32** *Il reticolo  $\{U'' : U \subseteq [0, 1]^\kappa\}$  è il reticolo dei chiusi di  $[0, 1]^\kappa$ . L'operatore  $''$  su  $\mathcal{P}([0, 1]^\kappa)$  è l'operatore di chiusura topologica. ■*

**Corollario 3.33** *Siano  $N, Q$  sottoalgebre isomorfe di  $\mathbf{I}$ . Allora  $N = Q$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\varphi : N \rightarrow Q$  un isomorfismo, e sia  $a \in N$ . Se fosse  $a \neq \varphi(a)$ , esisterebbe per la Proposizione 3.31  $A \in M_1$  con  $A(a) = 1$  e  $A(\varphi(a)) = 0$ , e questo è impossibile. ■

**Proposizione 3.34** *Sia  $U$  un chiuso di  $[0, 1]^\kappa$ . Allora  $\varphi : M_\kappa/U_I \rightarrow M_\kappa|U$  definito da  $\varphi(A/U_I) = A|U$  è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente  $\varphi$  è ben definita, è suriettiva, ed è un omomorfismo. Per definizione, l'ideale  $U_I$  è intersezione dei massimali  $\{r \in \text{MaxSpec } M_\kappa : r \in U\}$ . Ne segue che  $M_\kappa/U_I$  è semisemplice e  $\varphi$  è iniettivo. ■

In particolare, se  $r \in [0, 1]^\kappa$  è un ideale massimale di  $M_\kappa$ , allora  $M_\kappa/r$  e l'immagine della valutazione  $\mathbf{r} : M_\kappa \rightarrow \mathbf{I}$  sono MV-algebre isomorfe. Per il Corollario 3.33, scriveremo indifferentemente  $A(r)$  e  $A/r$ .

È immediata la seguente caratterizzazione dei  $\Gamma \subseteq FORM$  per cui vale il teorema di completezza in forma forte.

**Proposizione 3.35** *Sia  $\Gamma \subseteq FORM_\kappa$ , e sia  $U = \Gamma' = \bigcap \{1\text{-set}(A) : A \in \Gamma\} \subseteq [0, 1]^\kappa$ . Le seguenti sono equivalenti:*

1.  $\bar{\Gamma} = \Gamma''$ ;
2.  $M_\kappa/\bar{\Gamma}$  è semisemplice;
3.  $M_\kappa/\bar{\Gamma}$  è isomorfa a  $M_\kappa|U$ . ■

**Esempio 3.36** Costruiamo  $\Gamma \subseteq FORM_1$  per cui  $\Gamma \models A \not\Rightarrow \Gamma \vdash A$  assiomatizzando l'algebra di Chang. Starriamo l'intervallo  $[0, 1]$  nei punti  $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ , e costruiamo le formule di Schauder corrispondenti. Più precisamente, ponendo  $x = x_1$ , definiamo ricorsivamente

$$\begin{array}{lll}
 h_{01}^1 = \neg x \cdot \neg x & h_{12}^1 = x \wedge \neg x & h_{11}^1 = x \cdot x \\
 h_{01}^2 = h_{01}^1 \cdot \neg h_{12}^1 & h_{13}^2 = h_{01}^1 \wedge h_{12}^1 & h_{12}^2 = h_{12}^1 \cdot \neg h_{01}^1 \\
 \dots & \dots & \dots \\
 h_{01}^{n+1} = h_{01}^n \cdot \neg h_{1(n+1)}^n & h_{1(n+2)}^{n+1} = h_{01}^n \wedge h_{1(n+1)}^n & h_{1(n+1)}^{n+1} = h_{1(n+1)}^n \cdot \neg h_{01}^n \\
 \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Sia  $X = \{h_{11}^1, h_{12}^2, h_{13}^3, \dots\}$ , e sia  $I$  l'ideale di  $M_1$  generato da  $X$ .

$$h_{11}^1$$

$$h_{12}^2$$

$$h_{13}^3$$

$$h_{14}^4$$

Allora  $I = \{a \in M_1 : a = 0 \text{ in un intorno dello } 0\}$ . Infatti, se  $a \in I$ , allora esistono  $b_1, \dots, b_n \in X$  tali che  $a \leq b_1 \oplus \dots \oplus b_n$ . Poiché ogni  $b_i$  vale 0 in qualche intorno dello 0, ne segue che  $a = 0$  in qualche intorno dello 0. Viceversa, supponiamo che  $a = 0$  sull'intervallo  $[0, 1/n]$ . Sia  $b = h_{11}^1 \oplus 2h_{12}^2 \oplus 3h_{13}^3 \oplus \dots \oplus nh_{1n}^n \in I$ . Allora  $b$  vale 0 in  $[0, 1/(n+1)]$ , vale 1 in  $[1/n, 1]$ , ed è lineare in  $[1/(n+1), 1/n]$ . Quindi  $a \leq b$  e  $a \in I$ .

$M_1/I$  è dunque isomorfa al germe nello 0 di  $M_1$ , ed è facile vedere che quest'ultimo è proprio l'algebra di Chang (un elemento di  $M_1/I$  è determinato dal valore che assume in 0 e dalla sua derivata destra nello 0). Poiché  $x \in M_1$  vale 0 in  $I_H = X_H = \{0\}$ , ma è  $\neq 0$  in ogni intorno dello 0, ne segue che  $x \in I_H \setminus I$ . Ponendo  $\Gamma = \{-b : b \in X\}$ , abbiamo  $\Gamma \models \neg x$  e  $\Gamma \not\models x$ .

**Osservazione 3.37** Aggiungendo  $a \oplus a = a$  agli assiomi delle MV-algebre, ovvero  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  agli assiomi di Lukasiewicz, otteniamo una sottovarietà di  $\mathcal{M}$  che coincide con la varietà delle algebre di Boole. I connettivi  $\oplus$  e  $\vee$  collassano, e così pure  $\cdot$  e  $\wedge$  [Cha58b, pp. 470–471]. Tutte le algebre di Boole sono semisemplici ed iperarchimedee, e vale il teorema di completezza in forma forte.

**Definizione 3.38** Un *morfismo di McNaughton* su  $[0, 1]^\kappa$  è una funzione  $f : [0, 1]^\kappa \rightarrow [0, 1]^\kappa$  tale che, per ogni proiezione  $\pi_i : [0, 1]^\kappa \rightarrow [0, 1]$ ,  $f_i = \pi_i \circ f : [0, 1]^\kappa \rightarrow [0, 1]$

$[0, 1]$  è una funzione di McNaughton. Se esiste un morfismo di McNaughton  $g$  per cui  $f \circ g = g \circ f =$  (funzione identica), allora diciamo che  $f$  è un *omeomorfismo di McNaughton*.

Se  $f$  è un morfismo di McNaughton su  $[0, 1]^\kappa$ , l'applicazione  $f^* : M_\kappa \rightarrow M_\kappa$  definita da  $f^*(A) = A \circ f$  è un endomorfismo di  $M_\kappa$ . Equivalentemente,  $f^*$  è l'endomorfismo determinato da  $x_i \mapsto f_i$ . Sia  $\alpha : M_\kappa \rightarrow M_\kappa$  un endomorfismo. Allora la funzione continua  $\text{MaxSpec } \alpha : \text{MaxSpec } M_\kappa \leftarrow \text{MaxSpec } M_\kappa$  può essere naturalmente identificata con il morfismo di McNaughton  $f : [0, 1]^\kappa \leftarrow [0, 1]^\kappa$  definito da  $f_i = \alpha(x_i)$ . Infatti, identifichiamo  $r \in [0, 1]^\kappa$  con l'ideale massimale localizzato in  $r$ . Allora  $(\text{MaxSpec } \alpha)(r) = \alpha^{-1}(r) = \{A \in M_\kappa : \alpha(A) \in r\} = \{A : (\alpha(A))(r) = 0\} = \{A : (A(\dots, f_i, \dots))(r) = 0\} = \{A : A(f(r)) = 0\} =$  ideale localizzato in  $f(r)$ .

Per semplicità, poniamo  $\text{MaxSpec } \alpha = \alpha^*$ . È banale verificare che i funtori contravarianti  $*$  sono isomorfismi, l'uno inverso dell'altro, delle due categorie aventi entrambe un solo oggetto e i cui morfismi sono, nell'uno caso, gli endomorfismi di  $M_\kappa$ , e nell'altro, i morfismi di McNaughton su  $[0, 1]^\kappa$ . In altre parole, il monoide dei morfismi di McNaughton su  $[0, 1]^\kappa$  ed il monoide  $\text{End}(M_\kappa)$  sono antiisomorfi tramite  $*$ . Se ci restringiamo ai morfismi invertibili, otteniamo un antiisomorfismo fra il gruppo degli omeomorfismi di McNaughton su  $[0, 1]^\kappa$ , che indichiamo con  $\text{Hom}([0, 1]^\kappa)$ , ed  $\text{Aut}(M_\kappa)$ .

**Definizione 3.39** [RS72, pp. 13–14] Una  $k$ -cella  $B$  in  $\mathbf{R}^n$  è un poliedro compatto convesso di dimensione affine  $k$ . Un *complesso cellulare*  $W$  è un insieme finito di celle tali che:

1. se  $B \in W$  e  $C$  è una faccia di  $B$ , allora  $C \in W$ ;
2. ogni due celle di  $W$  si intersecano in una faccia comune.

**Teorema 3.40** Sia  $n$  un intero  $\geq 1$ , e sia  $f : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$  continua ed iniettiva. Allora  $f$  è un omeomorfismo di McNaughton se e soltanto se vale la condizione seguente:

esiste un complesso cellulare  $W$ , le cui  $n$ -celle sono  $B_1, \dots, B_k$ , ed esistono matrici  $(n+1) \times (n+1)$   $P_1, \dots, P_k$  ad elementi in  $\mathbf{Z}$ , tali che:

1.  $B_1 \cup \dots \cup B_k = [0, 1]^n$ ;
2.  $P_1, \dots, P_k$  sono unimodulari ed hanno determinanti dello stesso segno;
3. ogni  $P_j$  ha l'ultima colonna della forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4.  $P_j$  esprime  $f|B_j$  in coordinate omogenee (ovvero, se  $r = (r_1, \dots, r_n) \in B_j$  e  $f(r) = s = (s_1, \dots, s_n)$ , allora  $(s_1, \dots, s_n, 1) = (r_1, \dots, r_n, 1)P_j$ ).

Se  $f$  è un omeomorfismo di McNaughton e  $U \subseteq [0, 1]^k$ , allora  $\mu(f(U)) = \mu(U)$ , dove  $\mu$  denota la misura di Lebesgue.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $f$  un omeomorfismo di McNaughton e, per  $1 \leq i \leq n$ , sia  $f_i = \pi_i \circ f$ . Per la Proposizione 2.17, esiste un indice  $t$  tale che  $f_1, \dots, f_n$  sono tutte lineari su ogni simpleso di  $K_t$ . Siano  $B_1, \dots, B_k$  gli  $n$ -simplessi di  $W = K_t$ . Supponiamo che, su  $B_j$ , sia  $f_i(x_1, \dots, x_n) = a_i^1 x_1 + \dots + a_i^n x_n + a_i^{n+1}$ , e definiamo

$$P_j = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & 0 \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n & 0 \\ a_1^{n+1} & \cdots & a_n^{n+1} & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Le condizioni 1,3,4 sono ovviamente soddisfatte. Sia  $r = (r_1, \dots, r_n) \in B_j$  tale che  $r_1, \dots, r_n, 1$  sono linearmente indipendenti su  $\mathbf{Q}$ , e sia  $s = (s_1, \dots, s_n) = f(r)$ . Allora  $M_n/r \simeq f^{*-1}(M_n)/f^{*-1}(r) = M_n/f^{**}(r) = M_n/s$ . Sia  $N$  la sottoalgebra di  $\mathbf{I}$  generata da  $r_1, \dots, r_n$ ,  $Q$  la sottoalgebra di  $\mathbf{I}$  generata da  $s_1, \dots, s_n$ ,  $G$  il sottogruppo di  $\mathbf{R}$  generato da  $r_1, \dots, r_n, 1$ , ed  $H$  il sottogruppo di  $\mathbf{R}$  generato da  $s_1, \dots, s_n, 1$ . Allora  $\Gamma(G, 1) = N \simeq M_n/r \simeq M_n/s \simeq Q = \Gamma(H, 1)$ . Per il Teorema 3.8,  $G$  ed  $H$  sono isomorfi (di fatto coincidono, per il Corollario 3.33). Poiché  $G$  ed  $H$  sono entrambi isomorfi, come gruppi, al gruppo abeliano libero su  $n+1$  generatori, e  $P_j$  trasforma una base di  $G$  in una base di  $H$ , ne segue che  $P_j$  è unimodulare.

Supponiamo che i due  $n$ -simplessi distinti  $B_1 = \langle p^1, \dots, p^n, u \rangle$  e  $B_2 = \langle p^1, \dots, p^n, v \rangle$  si intersechino nella faccia  $(n-1)$ -dimensionale  $C = \langle p^1, \dots, p^n \rangle$ . Sia  $A_1$  la matrice associata a  $B_1$ , e  $A_2$  la matrice associata a  $B_2$ . Poiché  $B_1$  e  $B_2$  non hanno punti in comune eccetto quelli di  $C$ ,  $A_1$  e  $A_2$  hanno determinanti di segno opposto. La matrice associata a  $\langle f(p^1), \dots, f(p^n), f(u) \rangle$  è  $A_1 P_1$ , e quella associata a  $\langle f(p^1), \dots, f(p^n), f(v) \rangle$  è  $A_2 P_2$ ; pure esse devono avere determinanti di segno opposto. Ne segue che  $P_1$  e  $P_2$  devono avere determinanti dello stesso segno.

È sufficiente adesso dimostrare che, se  $B, B'$  sono  $n$ -simplessi di  $K_t$ , allora esiste una successione  $B = C_1, \dots, C_h = B'$  di  $n$ -simplessi di  $K_t$  tale che, per ogni  $1 \leq i \leq h$ ,  $C_i$  e  $C_{i+1}$  hanno in comune una faccia  $(n-1)$ -dimensionale. Dimostriamo questo per induzione su  $t$ .

Sia  $t = 0$ , e siano  $u^1, \dots, u^{n+1}$  e  $v^1, \dots, v^{n+1}$  percorsi sull'  $n$ -cubo. Siano  $B = \langle u^1, \dots, u^{n+1} \rangle$  e  $B' = \langle v^1, \dots, v^{n+1} \rangle$ . Se  $B = B'$ , non c'è niente da dimostrare. Altrimenti, sia  $i$  minimo tale che  $u^i \neq v^i$ . Sia  $w^{i+1} = u^i \vee v^i$  ( $\vee$  nel senso dell'algebra di Boole  $\mathbf{2}^n$ ), e siano  $w^{i+2}, \dots, w^{n+1}$  vertici dell'  $n$ -cubo scelti in modo tale che  $u^1, \dots, u^i, w^{i+1}, w^{i+2}, \dots, w^{n+1}$  sia un percorso. Allora  $C = \langle u^1, \dots, u^i, w^{i+1}, w^{i+2}, \dots, w^{n+1} \rangle$  e  $C' = \langle v^1, \dots, v^i, w^{i+1}, w^{i+2}, \dots, w^{n+1} \rangle$  sono  $n$ -simplessi di  $K_0$  aventi in

comune una faccia  $(n - 1)$ -dimensionale. Per ipotesi induttiva  $B$  e  $C$  sono collegati da una successione di  $n$ -simplessi come nell' enunciato, e così pure  $B'$  e  $C'$ . Questo dimostra il passo base.

Per il passo induttivo, è sufficiente mostrare che, se  $C, C'$  sono  $n$ -simplessi di  $K_q$  ( $q < t$ ) aventi in comune una faccia  $(n - 1)$ -dimensionale, e se  $K_{q+1}$  è ottenuto starrando  $K_q$  lungo uno spigolo di  $C$  (eventualmente comune a  $C'$ ), allora tutti gli  $n$ -simplessi ottenuti da  $C$  e  $C'$  tramite lo starring sono collegati da una successione di  $n$ -simplessi aventi in comune una faccia  $(n - 1)$ -dimensionale. Questo segue da una banale quanto tediosa analisi per casi.

Per l' implicazione inversa, assumiamo che valga la condizione espressa nell' enunciato. Per ogni  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_i = \pi_i \circ f$  è una funzione di McNaughton, e quindi  $f$  è un morfismo di McNaughton. Fissiamo  $1 \leq j \leq k$  e assumiamo che  $P_j$  abbia la forma  $(*)$ , per certi  $a_1^1, \dots, a_n^{n+1} \in \mathbf{Z}$ . Allora, in coordinate non omogenee,  $f|_{B_j}$  ha la forma

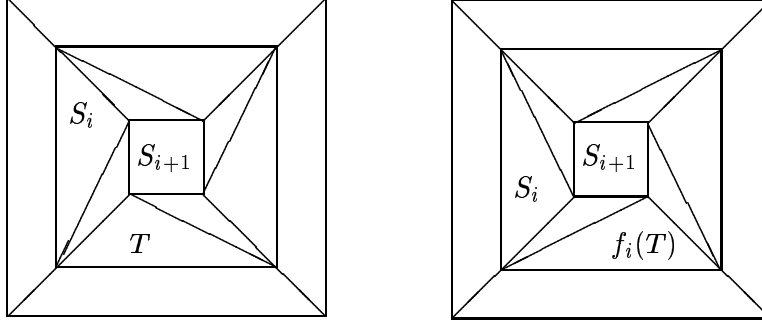
$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} + (a_1^{n+1}, \dots, a_n^{n+1}).$$

Poiché  $P_j$  è unimodulare,  $\mu(f(B_j)) = \mu(B_j)$ . Poiché  $f$  è iniettiva e continua, e l'  $n$ -cubo è compatto,  $f([0, 1]^n)$  è un chiuso in  $[0, 1]^n$  di misura 1. Ne segue che  $[0, 1]^n \setminus f([0, 1]^n)$  è un aperto di misura 0, e quindi è vuoto; di conseguenza,  $f$  è suriettiva ed è un omeomorfismo. Rimane da esprimere  $f^{-1}$  come morfismo di McNaughton, ma questo è immediato osservando che  $\{f(B) : B \in W\}$  è un complesso cellulare e che, sostituendo  $B_j$  con  $f(B_j)$  e  $P_j$  con  $P_j^{-1}$ , le condizioni 1–4 sono ancora soddisfatte. ■

**Esempio 3.41** Gli unici automorfismi di  $M_1$  sono l' identità e  $x \mapsto \neg x$ . Infatti, la lunghezza di ogni segmento è preservata da ogni  $f \in \text{Hom}([0, 1])$ . Se  $f(0) = 0$ , allora  $f^*$  è l' identità. Se  $f(0) = 1$ , allora  $f(r) = 1 - r$  per ogni  $r \in [0, 1]$ , e quindi  $f^* : x \mapsto \neg x$ .

**Esempio 3.42** Descriviamo una famiglia  $\{f_i : i \geq 0\}$  di elementi di  $\text{Hom}([0, 1]^2)$ . Per  $i \geq 0$ , sia  $S_i$  il quadrato di vertici (come sempre, in coordinate omogenee)  $(i, i, 2i + 1), (i + 1, i, 2i + 1), (i + 1, i + 1, 2i + 1), (i, i + 1, 2i + 1)$ . Consideriamo i

due complessi cellulari



(in entrambi i complessi, i due quadrati concentrici sono  $S_i$  e  $S_{i+1}$ ). Descriviamo come  $f_i$  trasforma il primo nel secondo.

1. Per  $i \geq 1$ , le quattro celle non contenute in  $S_i$  rimangono fisse.
2. Il quadrato  $S_{i+1}$  viene trasformato in se stesso tramite una rotazione di  $\pi/2$  in senso antiorario e di centro  $(1, 1, 2)$ . In coordinate omogenee, tale rotazione è espressa dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. L'azione di  $f_i$  sulle otto celle triangolari è determinata dall'azione sui loro vertici, e tale azione è definita nei punti 1 e 2. Per esempio,  $f_i$  mappa il triangolo  $T$  di vertici  $(i, i, 2i+1)$ ,  $(i+1, i, 2i+1)$ ,  $(i+i, i+1, 2i+3)$ , nel triangolo  $f_i(T)$  di vertici  $(i, i, 2i+1)$ ,  $(i+1, i, 2i+1)$ ,  $(i+2, i+1, 2i+3)$ . Abbiamo

$$\begin{pmatrix} i & i & 2i+1 \\ i+1 & i & 2i+1 \\ i+2 & i+1 & 2i+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i & 2i+1 \\ i+1 & i & 2i+1 \\ i+1 & i+1 & 2i+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2i+1 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui  $\pi_1 \circ (f_i|T) = x_1 + (2i+1)x_2 - i$  e  $\pi_2 \circ (f_i|T) = x_2$ .

I grafi di  $\pi_1 \circ f_0 = f_0^*(x_1)$  e di  $\pi_2 \circ f_0 = f_0^*(x_2)$  sono, rispettivamente,

È sorprendente come il complesso cellulare che induce  $f_0$  si ritrovi in [Dan78, p. 119], come impedimento alla proiettività di una varietà torica.

Per ogni intero  $k \geq 1$ , sia adesso  $Gr_k = \{r \in [0, 1]^n : \text{den}(r) = k\}$ , e sia  $\text{Sym}(Gr_k)$  il gruppo delle permutazioni di  $Gr_k$ . Abbiamo un omomorfismo naturale dal gruppo  $\text{Hom}([0, 1]^n)$  a  $\text{Sym}(Gr_k)$ , il cui kernel è  $H_k = \{f \in \text{Hom}([0, 1]^n) : f \text{ è l'identità su } Gr_k\}$ . Per continuità, se  $f$  è l'identità su ogni  $Gr_k$ , allora  $f$  è l'identità dappertutto. Ne segue che  $\text{Hom}([0, 1]^n)$  è residualmente finito [MKS76, pp. 116, 414], ed è immergibile in  $\prod_{k \geq 1} \text{Sym}(Gr_k)$ .

Sia  $E_0 = \text{Hom}([0, 1]^n)$ ,  $E_k = \bigcap_{1 \leq i \leq k} H_i \triangleleft E_0$ . Assumendo la famiglia  $\{E_k : 0 \leq k\}$  come sistema di intorni dell'identità, dotiamo in modo naturale  $\text{Hom}([0, 1]^n)$  di una struttura di gruppo topologico [MKS76, p. 388]. Questa topologia è metrizzabile definendo la distanza  $d(f, g)$  fra  $f$  e  $g$  come

$$d(f, g) = \begin{cases} 0, & \text{se } f = g; \\ 1/\min\{k : f \neq g \text{ su } Gr_k\}, & \text{se } f \neq g. \end{cases}$$

**Teorema 3.43** *Il gruppo topologico  $\text{Hom}([0, 1]^2)$  non è completo. Per  $i \geq 0$ , sia  $g_i = f_i f_{i-1} \dots f_0$ , dove gli  $f_j$  sono definiti come nell'Esempio 3.42. Allora la successione  $g_0, g_1, g_2, \dots$  è di Cauchy, ma non ha limite in  $\text{Hom}([0, 1]^2)$ . Il sottogruppo che genera è il gruppo abeliano libero su  $\omega$  generatori, e gli  $f_j$  ne sono generatori liberi.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $F$  il sottogruppo di  $\text{Hom}([0, 1]^2)$  generato dai  $g_i$  (equivalentemente, dagli  $f_j$ ). Mostriamo che  $F$  è abeliano e che gli  $f_j$  sono generatori liberi di  $F$ . Dobbiamo dimostrare:

1. ogni  $f_j$  ha periodo infinito;
2. per ogni  $i, j$ , gli elementi  $f_i$  ed  $f_j$  commutano, e così pure  $f_i$  ed  $f_j^{-1}$ ;



3. se  $k_1, \dots, k_r \in \mathbf{Z}$  sono tali che  $f_{j_1}^{k_1} f_{j_2}^{k_2} \dots f_{j_r}^{k_r}$  è l'identità su  $[0, 1]^2$ , allora  $k_1 = \dots = k_r = 0$ .

1. Possiamo assumere  $j = 0$ ; il caso generale differisce per un semplice appesantimento di notazione. Sia  $k \geq 1$ , e sia  $p$  il punto di coordinate non omogenee  $(1/3, 1/(6k))$ . Allora  $p$  appartiene al triangolo  $T$  dell'Esempio 3.42, ed è facile verificare che  $f_0^k(p) = (1/2, 1/(6k)) \neq p$ .

2. Se  $i = j$ , la cosa è ovvia. Possiamo supporre  $i < j$ . Poiché  $f_j$  è l'identità su  $[0, 1]^2 \setminus S_j$ , ne segue che  $f_i$  ed  $f_j$  commutano su  $[0, 1]^2 \setminus S_j$ .  $f_i$  agisce su  $S_{i+1}$  tramite una rotazione di  $\pi/2$  attorno a  $(1, 1, 2)$ , ed è chiaro che  $f_j$  commuta con una tale rotazione; quindi  $f_i$  ed  $f_j$  commutano su  $S_j \subseteq S_{i+1}$ . Ragioniamo in modo analogo per dimostrare che  $f_i$  ed  $f_j^{-1}$  commutano.

3. Supponiamo che  $f_{j_1}^{k_1} f_{j_2}^{k_2} \dots f_{j_r}^{k_r}$  sia l'identità su  $[0, 1]^2$ . Possiamo assumere  $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r$ . Poiché  $f_{j_2}, \dots, f_{j_r}$  sono l'identità su  $[0, 1]^2 \setminus S_{j_2} \supseteq [0, 1]^2 \setminus S_{j_1+1}$ , ne segue che  $f_{j_1}^{k_1}$  è l'identità su  $S_{j_1} \setminus S_{j_1+1}$ . Nella dimostrazione di 1, il punto  $p$  per cui  $f_j^k(p) \neq p$  appartiene a  $S_j \setminus S_{j+1}$ . Abbiamo quindi  $k_1 = 0$ , e l'asserto segue per induzione.

Dimostriamo che  $g_0, g_1, g_2, \dots$  è una sequenza di Cauchy. Sia  $k \geq 1$ , e sia  $i$  tale che  $2(i+1) + 1 \geq k$ . È facile dimostrare per induzione su  $j$  che  $(Gr_1 \cup Gr_2 \cup \dots \cup Gr_{2j+1}) \cap (\text{interno topologico di } S_j) \subseteq \{(1, 1, 2)\}$ . Siano  $r > s \geq i$ , e sia  $h = g_r g_s^{-1} = f_{s+1} \dots f_r$ . Allora  $h$  è l'identità su  $[0, 1]^2 \setminus (\text{interno topologico di } S_{s+1})$ . Poiché  $h$  (come tutti gli elementi di  $\text{Hom}([0, 1]^2)$ ) fissa  $(1, 1, 2)$ , ne segue che  $h$  fissa  $Gr_1 \cup \dots \cup Gr_{2(s+1)+1}$ , e quindi  $h \in E_{2(s+1)+1} \subseteq E_{2(i+1)+1} \subseteq E_k$ . Quindi  $d(g_r, g_s) < 1/k$ , e  $g_0, g_1, g_2, \dots$  è di Cauchy.

Sia  $g = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i$ . Allora l'immagine sotto  $g$  del segmento  $\langle (0, 0, 1), (1, 1, 2) \rangle$  è non lineare in infiniti punti (nel vertice  $(2, 1, 3)$  di  $S_1$ , nel vertice  $(3, 3, 5)$  di  $S_2$ , nel vertice  $(3, 5, 7)$  di  $S_3, \dots$ ). È chiaro che l'immagine di un segmento sotto un elemento di  $\text{Hom}([0, 1]^2)$  è non lineare in al più un numero finito di punti. ■

Per [Lan93, Theorem 10.1], abbiamo:

**Teorema 3.44** *Il completamento del gruppo  $\text{Hom}([0, 1]^n)$  è il gruppo profinito  $\lim_{\leftarrow} \text{Hom}([0, 1]^n)/E_k$ , ovvero il limite inverso del sistema di gruppi finiti*

$$1 \leftarrow \text{Hom}([0, 1]^n)/E_1 \leftarrow \text{Hom}([0, 1]^n)/E_2 \leftarrow \dots$$

$\text{Hom}([0, 1]^n)$  è immergibile nel suo completamento. ■

## 4 Relazioni con AF $C^*$ -algebre

In questo capitolo mostriamo come lo studio delle MV-algebre abbia connessioni rilevanti con quello delle AF  $C^*$ -algebre. Rivediamo brevemente le definizioni di base della teoria delle AF  $C^*$ -algebre, rimandando a [Bra72], [Ell76], [Eff81], [Goo82] per maggiori dettagli.

**Definizione 4.1** Una  $C^*$ -algebra è un' algebra  $\mathcal{A} = (A, +, -, \cdot, 0)$  sul campo  $\mathbf{C}$  dei numeri complessi, munita di un' involuzione  $*$  e di una norma  $\| \cdot \|$  soddisfacenti:

1.  $a^{**} = a$ ;
2.  $(a + b)^* = a^* + b^*$ ;
3.  $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ ;
4.  $(ab)^* = b^* a^*$ ;
5.  $\|a^*\| = \|a\|$ ;
6.  $\|aa^*\| = \|a\| \|a^*\|$ ;
7.  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ ;
8.  $A$  è uno spazio topologico completo rispetto alla norma  $\| \cdot \|$ .

$\mathcal{A}$  è *unitaria* se ha un' identità moltiplicativa  $1_{\mathcal{A}}$ . Un omomorfismo  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  di  $C^*$ -algebre unitarie è *unitario* se  $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ .

Ogni  $C^*$ -algebra semplice di dimensione finita è isomorfa a  $\text{Mat}_n(\mathbf{C})$ ; per  $A \in \text{Mat}_n(\mathbf{C})$ ,  $A^*$  è la coniugata Hermitiana di  $A$ , e  $\|A\|$  è la norma di  $A$ , vista come operatore  $A : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ . Ogni  $C^*$ -algebra di dimensione finita  $\mathcal{A}$  è semisemplice, ed è isomorfa ad una somma diretta  $\text{Mat}_{n_1}(\mathbf{C}) \times \cdots \times \text{Mat}_{n_k}(\mathbf{C})$ ; il vettore colonna  $u_{\mathcal{A}} = (n^1, \dots, n^k) \in \mathbf{N}^k$  caratterizza univocamente  $\mathcal{A}$ . Ogni omomorfismo  $\varphi : \mathcal{A} = \text{Mat}_{n_1}(\mathbf{C}) \times \cdots \times \text{Mat}_{n_k}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{B} = \text{Mat}_{m_1}(\mathbf{C}) \times \cdots \times \text{Mat}_{m_h}(\mathbf{C})$  fra  $C^*$ -algebre di dimensione finita è descritto univocamente, a meno di automorfismi di  $\mathcal{A}$  e di  $\mathcal{B}$ , dalla specifica, per ogni fattore  $\text{Mat}_{n_i}(\mathbf{C})$  di  $\mathcal{A}$ , dei fattori di  $\mathcal{B}$  in cui  $\text{Mat}_{n_i}(\mathbf{C})$  si immerge, e della molteplicità dell' immersione. Questa informazione è esprimibile tramite una matrice  $M_{\varphi}$ , di dimensione  $h \times k$  e ad elementi in  $\mathbf{Z}^+$ : l' elemento  $m_i^j$  nella  $j$ -esima riga e  $i$ -esima colonna di  $M_{\varphi}$  è la molteplicità con cui lo  $i$ -esimo fattore di  $\mathcal{A}$  si immerge nel  $j$ -esimo fattore di  $\mathcal{B}$  (la mancanza di immersione essendo vista come immersione di molteplicità 0).

**Esempio 4.2** Sia  $\varphi : \mathcal{A} = \text{Mat}_2(\mathbf{C}) \times \text{Mat}_1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{B} = \text{Mat}_3(\mathbf{C}) \times \text{Mat}_3(\mathbf{C}) \times \text{Mat}_1(\mathbf{C})$  definita come segue:

il primo fattore di  $\mathcal{A}$  si immerge nel primo fattore di  $\mathcal{B}$  con molteplicità 1; il secondo fattore di  $\mathcal{A}$  si immerge in tutti i fattori di  $\mathcal{B}$  con molteplicità 1, 2, 1, rispettivamente.

Possiamo visualizzare  $\varphi$  immergendo diagonalmente  $\mathcal{A}$  in  $\text{Mat}_3(\mathbf{C})$  e  $\mathcal{B}$  in  $\text{Mat}_7(\mathbf{C})$ . Se  $(A_1, A_2)$  è un generico elemento di  $\mathcal{A}$ , abbiamo allora:

$$\left( \begin{array}{c} \boxed{A_1} \\ \boxed{A_2} \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccccccc} \boxed{A_1} & & & & & & \\ & \boxed{A_2} & & & & & \\ & & \boxed{A_2} & & & & \\ & & & \boxed{A_2} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \boxed{A_2} & \\ & & & & & & \boxed{A_2} \end{array} \right)$$

La matrice associata a  $\varphi$  è

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che l' omomorfismo  $\varphi$  dell' Esempio 4.2 non è unitario. Di fatto,  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  è unitario se e soltanto se vale l' identità  $u_{\mathcal{B}} = M_\varphi u_{\mathcal{A}}$ ; in generale avremo  $u_{\mathcal{B}} \geq M_\varphi u_{\mathcal{A}}$  ( $\mathcal{A}, \mathcal{B}$   $C^*$ -algebre di dimensione finita,  $\geq$  l' ordine per componenti su  $\mathbf{Z}^h$ ).  $\varphi$  è un' immersione sse  $M_\varphi$  non ha colonne composte interamente da zeri; senza perdita di generalità assumiamo senz' altro questa condizione [BE78, §2]. Inoltre l' immagine di  $\varphi$  non è contenuta in un ideale proprio di  $\mathcal{B}$  sse  $M_\varphi$  non ha righe composte interamente di zeri. Se  $\varphi$  è unitario, questa seconda condizione si verifica sempre.

**Definizione 4.3** Una  $C^*$ -algebra approssimativamente finita (AF  $C^*$ -algebra) è la chiusura in norma di un limite diretto di un sistema

$$\mathcal{A}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathcal{A}_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots \quad (*)$$

dove le  $\mathcal{A}_i$  sono  $C^*$ -algebre di dimensione finita e i  $\varphi_i$  sono omomorfismi.

Se i  $\varphi_i$  sono unitari, allora l' algebra limite è unitaria; viceversa, ogni AF  $C^*$ -algebra unitaria può essere espressa come limite di un sistema di omomorfismi unitari [HJ80, Proposition 2.4]. In altre parole, una AF  $C^*$ -algebra unitaria è la chiusura in norma di una successione ascendente di  $C^*$ -algebre di dimensione finita, tutte con la stessa identità moltiplicativa. Una AF  $C^*$ -algebra è automaticamente separabile, e quindi i suoi ideali primi bilateri sono kernels di rappresentazioni irriducibili [HJ80, Proposition 4.17].

**Definizione 4.4** Un *dimension group* è un gruppo di Riesz  $G$  il cui cono positivo  $G^+$  è non perforato:

per ogni  $a \in G$  ed  $n \in \mathbf{N}$ , se  $na \in G^+$ , allora  $a \in G^+$ .

Una *scala* del dimension group  $G$  è un sottoinsieme  $D$  di  $G^+$  convesso in  $G^+$ , direttato superiormente, e tale che ogni elemento di  $G^+$  è somma di elementi di  $D$ . Uno *scaled dimension group* è una coppia  $(G, D)$ , dove  $G$  è un dimension group e  $D$  è una scala su  $G$ . Un *omomorfismo*  $\varphi : (G_1, D_1) \rightarrow (G_2, D_2)$  fra scaled dimension groups è un omomorfismo  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  tale che  $\varphi(D_1) \subseteq D_2$ ; questa condizione implica che  $\varphi$  è positivo.

Sia  $u = (u^1, \dots, u^n) \in \mathbf{Z}^n$ . Allora  $u$  è un' unità forte di  $\mathbf{Z}^n$  se e soltanto se  $u^i > 0$  per ogni  $i$ , se e soltanto se  $[0, u]$  è una scala su  $\mathbf{Z}^n$ .

Siano  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$   $C^*$ -algebre di dimensione finita, caratterizzate dai vettori  $u_{\mathcal{A}} \in \mathbf{N}^k$  e  $u_{\mathcal{B}} \in \mathbf{N}^h$ , rispettivamente. Sia  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un omomorfismo, e sia  $M_\varphi$  la matrice caratterizzante  $\varphi$ . Poiché  $u_{\mathcal{B}} \geq M_\varphi u_{\mathcal{A}}$  in  $\mathbf{Z}^h$ , l'applicazione  $\tilde{\varphi} : (\mathbf{Z}^k, [0, u_{\mathcal{A}}]) \rightarrow (\mathbf{Z}^h, [0, u_{\mathcal{B}}])$  definita da  $\tilde{\varphi}(v) = M_\varphi v$  è un omomorfismo di scaled dimension groups;  $\varphi$  è un' immersione se e soltanto se  $(\ker \tilde{\varphi}) \cap \mathbf{Z}^{k+} = \{0\}$  [Bla86, Proposition 7.3.1].

Sia  $\mathcal{A}$  la AF  $C^*$ -algebra limite del sistema (\*). Supponiamo che  $\mathcal{A}_i$  sia caratterizzata da  $u_i = u_{\mathcal{A}_i} \in \mathbf{N}^{k_i}$ , e consideriamo il sistema di omomorfismi fra scaled dimension groups

$$(\mathbf{Z}^{k_1}, [0, u_1]) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} (\mathbf{Z}^{k_2}, [0, u_2]) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} (\mathbf{Z}^{k_3}, [0, u_3]) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_3} \dots \quad (**)$$

Sia  $(G, D)$  il limite diretto (definito come usuale) del sistema (\*\*); in particolare,  $D = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \tilde{\varphi}_{i\infty}([0, u_i])$ , dove  $\tilde{\varphi}_{i\infty}$  è l'omomorfismo naturale di  $\mathbf{Z}^{k_i}$  in  $G$ .

**Teorema 4.5** [Eff81, Theorem 7.6, Corollary 8.3] *Siano  $\mathcal{A}, (G, D)$  definiti come sopra.  $(G, D)$  è uno scaled dimension group e, a meno di isomorfismo, non dipende dal particolare sistema (\*) approssimante  $\mathcal{A}$ . Ogni scaled dimension group è ottenibile tramite una tale costruzione a partire da un' unica (a meno di isomorfismo) AF  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$ . ■*

In altre parole, gli scaled dimension groups costituiscono una classe completa di invarianti per le AF  $C^*$ -algebre.

#### 4.1 Classificazione delle AF $C^*$ -algebre il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare

Eccetto che nell' Esempio 4.27, considereremo sempre  $C^*$ -algebre ed omomorfismi unitari; questo è il caso esaminato originariamente da Bratteli in [Bra72]. Il sistema (\*\*) della sezione precedente diviene quindi un sistema

$$(\mathbf{Z}^{k_1}, u_1) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} (\mathbf{Z}^{k_2}, u_2) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} (\mathbf{Z}^{k_3}, u_3) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_3} \dots \quad (***)$$

nella categoria degli  $\ell$ -gruppi con unità forte. Il limite  $(G, u)$  di (\*\*\*) è un dimension group (non necessariamente un  $\ell$ -gruppo) con unità forte  $u = \tilde{\varphi}_{1\infty}(u_1)$ , ed abbiamo  $(G, u) = (K_0(\mathcal{A}), [1_{\mathcal{A}}])$ , dove  $K_0$  è il funtore di Grothendieck [Goo82, 21.4]. La scala  $D = [0, u]$  di  $(G, u)$  può essere identificata con il semigruppulo locale di Elliott di  $\mathcal{A}$  [Eli76].

**Definizione 4.6** Sia  $\mathcal{A}$  una AF  $C^*$ -algebra,  $p \in \mathcal{A}$ . Se  $p = p^2 = p^*$ , diciamo che  $p$  è una *proiezione*. Le proiezioni  $p, q \in \mathcal{A}$  sono *equivalenti nel senso di Murray-von Neumann* se esiste  $a \in \mathcal{A}$  tale che  $p = aa^*$  e  $q = a^*a$ ;  $[p]$  denota la classe di equivalenza di  $p$ . Le proiezioni  $p, q$  sono *ortogonali* se  $pq = qp = 0$ . Il *semigruppulo locale di Elliott*  $D(\mathcal{A})$  di  $\mathcal{A}$  è l'insieme delle classi di equivalenza delle proiezioni di  $\mathcal{A}$ , dotato dell'operazione parziale di somma:

$$[p] + [q] = \begin{cases} [p + q], & \text{se } p \text{ e } q \text{ sono ortogonali;} \\ \text{indefinito,} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

L'*ordine di Murray-von Neumann* su [le classi di equivalenza delle proiezioni di]  $\mathcal{A}$  è definito da:  $[p] \leq [q]$  se e soltanto se  $p$  è equivalente ad una sottoproiezione di  $q$  (ovvero, esiste  $r \in [p]$  con  $rq = qr = r$ ).

La somma parziale  $+$  su  $D(\mathcal{A})$  è associativa, commutativa, e monotona rispetto all'ordine: se  $[p] \leq [q]$  e  $[r] \leq [s]$ , allora  $[p] + [r] \leq [q] + [s]$ , purché  $[q] + [s]$  sia definita.

È sempre possibile estendere  $+$  ad una banale somma  $+'$  definita su tutto  $D(\mathcal{A})$ , mantenendo  $+'$  associativa, commutativa, e monotona. Possiamo infatti porre  $[p] +' [q] = [1_{\mathcal{A}}]$  in tutti i casi in cui  $[p] + [q]$  non è definita. Siamo invece interessati a estensioni associative, commutative, monotone di  $+$ , le quali preservino anche la condizione naturale di *residualità*:

per ogni  $[p] \in D(\mathcal{A})$ , l'elemento  $\neg[p] = [1_{\mathcal{A}} - p]$  è il minimo elemento di  $D(\mathcal{A})$  la cui somma con  $[p]$  sia  $[1_{\mathcal{A}}]$ .

Dimostreremo i seguenti teoremi.

**Teorema 4.7** Sia  $D(\mathcal{A})$  il semigruppulo locale della AF  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$ . Allora:

1. la somma parziale  $+$  ha al più un'estensione ad una somma totale  $\oplus$  che sia ancora associativa, commutativa, monotona e residuale;
2. tale unica estensione esiste se e soltanto se l'ordine di Murray-von Neumann di  $\mathcal{A}$  è reticolare.

In [Eli76], Elliott ha dimostrato che il semigruppulo locale  $(D(\mathcal{A}), +)$  è un invariante completo per la classe di tutte le AF  $C^*$ -algebre. Analogamente, per il semigruppulo  $(D(\mathcal{A}), \oplus)$  dato dal Teorema 4.7, abbiamo il seguente risultato.

**Teorema 4.8** *Siano  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  AF  $C^*$ -algebre i cui ordini di Murray-von Neumann sono reticolari. Supponiamo che i semigrupperi  $(D(\mathcal{A}_1), \oplus)$  e  $(D(\mathcal{A}_2), \oplus)$ , definiti come nell'enunciato del Teorema 4.7, siano isomorfi. Allora  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  sono isomorfe.*

**Lemma 4.9** *Supponiamo che l'ordine di Murray-von Neumann  $\leq$  di  $\mathcal{A}$  sia reticolare. Allora  $\leq$  può essere recuperato dal semigruppero  $(D(\mathcal{A}), \oplus)$  dato dal Teorema 4.7 ponendo:*

$$[p] \leq [q] \text{ se e soltanto se esiste } [r] \text{ con } [q] = [p] \oplus [r].$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $[q] = [p] \oplus [r]$ . Poiché  $[p] \leq [p]$ ,  $[0] \leq [r]$ , e  $\oplus$  è un'estensione monotona di  $+$ , abbiamo  $[p] = [p] + [0] = [p] \oplus [0] \leq [p] \oplus [r] = [q]$ . Viceversa, se  $[p] \leq [q]$ , possiamo assumere senza perdita di generalità  $pq = qp = p$ . Ne segue che  $q - p$  è una proiezione di  $\mathcal{A}$ , e poniamo  $r = q - p$ . ■

Per il Lemma 4.9, dal semigruppero  $(D(\mathcal{A}), \oplus)$  possiamo recuperare l'elemento minimo  $0 = [0]$ , l'elemento massimo  $1 = [1_{\mathcal{A}}]$  e —per la condizione di residualità— per ogni  $a \in D(\mathcal{A})$ , il più piccolo elemento  $b = \neg a$  tale che  $a \oplus b = 1$ . Di conseguenza, il Teorema 4.7 comporta in effetti un'applicazione  $\mathcal{A} \mapsto (D(\mathcal{A}), \oplus, \neg, 0)$ , trasformando  $\mathcal{A}$  in un'algebra di tipo  $(2, 1, 0)$ .

**Teorema 4.10** *L'applicazione  $\mathcal{A} \mapsto (D(\mathcal{A}), \oplus, \neg, 0)$  è una corrispondenza biunivoca fra la classe delle [classi di isomorfismo delle] AF  $C^*$ -algebre il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare e la classe delle [classi di isomorfismo delle] MV-algebre numerabili.*

#### Dimostrazione del Teorema 4.7(1)

Sia  $\mathcal{A}$  una fissata AF  $C^*$ -algebra,  $(D(\mathcal{A}), +)$  il suo semigruppero locale,  $\oplus$  un'estensione associativa, commutativa, monotona e residuale di  $+$ ,  $1 = 1_{\mathcal{A}}$ . Per ogni  $[p] \in D(\mathcal{A})$ , sia  $\neg[p] = [1 - p]$ .

**Lemma 4.11** *Siano  $[p], [q] \in D(\mathcal{A})$ . Allora  $[p] \leq [q]$  se e soltanto se  $\neg[p] \oplus [q] = [1]$ .*

**DIMOSTRAZIONE.**  $\implies$  . Senza perdita di generalità,  $p$  è una sottoproiezione di  $q$  (ovvero,  $pq = qp = p$ ); di conseguenza,  $\neg[q] \leq \neg[p]$ . Abbiamo quindi  $[1] = \neg[q] + [q] = \neg[q] \oplus [q] \leq \neg[p] \oplus [q]$ .

$\impliedby$  . Per la condizione di residualità, se  $\neg[p] \oplus [q] = [1]$ , allora  $[q] \geq \neg\neg[p] = [p]$ . ■

**Lemma 4.12** *Siano  $[p], [q] \in D(\mathcal{A})$ . Allora  $\neg(\neg[p] \oplus [q]) \oplus [q]$  è il sup  $[p] \vee [q]$  di  $[p]$  e  $[q]$  rispetto all'ordine di Murray-von Neumann di  $D(\mathcal{A})$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $\oplus$  è monotona,  $[q] \leq \neg(\neg[p] \oplus [q]) \oplus [q]$ . Per il Lemma 4.11,  $[p] \leq \neg(\neg[p] \oplus [q]) \oplus [q]$  se  $\neg[p] \oplus (\neg(\neg[p] \oplus [q]) \oplus [q]) = [1]$  e quest'ultima identità

vale per l' associatività e la commutatività di  $\oplus$ .

Sia  $[r] \in D(\mathcal{A})$  tale che  $[p], [q] \leq [r]$ . Senza perdita di generalità  $qr = rq = q$ ; di conseguenza,  $r - q$  è una proiezione ortogonale a  $q$ , ed abbiamo

$$[r] = [r - q] + [q] = [1 - (q + (1 - r))] + [q] = \neg([q] \oplus \neg[r]) \oplus [q].$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} [p] &\leq [r] \\ \neg[r] &\leq \neg[p] \\ \neg[r] \oplus [q] &\leq \neg[p] \oplus [q] \\ \neg(\neg[p] \oplus [q]) &\leq \neg(\neg[r] \oplus [q]) \\ \neg(\neg[p] \oplus [q]) \oplus [q] &\leq [r] \end{aligned}$$

che è quanto dovevamo dimostrare.  $\blacksquare$

Siano adesso  $\oplus$  e  $\oplus'$  estensioni associative, commutative, monotone e residuali della somma di Elliott  $+$  su  $D(\mathcal{A})$ . Siano  $[r], [q] \in D(\mathcal{A})$ , e dimostriamo che  $[r] \oplus [q] = [r] \oplus' [q]$ . Poniamo  $p = 1 - r$ , e siano  $s, s'$  proiezioni di  $\mathcal{A}$  tali che  $[s] = \neg(\neg[p] \oplus [q])$  e  $[s'] = \neg(\neg[p] \oplus' [q])$ . Allora  $[q] \leq \neg[p] \oplus [q] = \neg[s] = [1 - s]$ . Poiché  $s$  e  $1 - s$  sono ortogonali, possiamo assumere senza perdita di generalità che  $s$  e  $q$  siano ortogonali. Per il Lemma 4.12,  $[p] \vee [q] = \neg(\neg[p] \oplus [q]) \oplus [q] = [s] \oplus [q] = [s] + [q] = [s + q]$ . Analogamente, otteniamo  $[p] \vee [q] = [s' + q]$  e, poiché la somma parziale di Elliott è cancellativa, concludiamo che  $[s] = [s']$ . Abbiamo così  $[r] \oplus [q] = \neg[p] \oplus [q] = \neg[s] = \neg[s'] = \neg[p] \oplus' [q] = [r] \oplus' [q]$ ; questo conclude la dimostrazione del Teorema 4.7(1).

### Dimostrazione del Teorema 4.7(2)

Supponiamo che  $\oplus$  sia un' estensione associativa, commutativa, monotona e residuale della somma di Elliott  $+$  su  $D(\mathcal{A})$ . Allora, per il Lemma 4.12,  $D(\mathcal{A})$  è chiuso per  $\vee$ . Poiché l' operazione  $\neg$  inverte l' ordine,  $D(\mathcal{A})$  è chiuso anche per  $\wedge$ , e quindi l' ordine di Murray-von Neumann di  $\mathcal{A}$  è reticolare.

Per dimostrare il viceversa, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari. Per tutta questa sezione,  $G$  denota un fissato gruppo di Riesz e  $u$  una fissata unità forte di  $G$ . Assumiamo che l' ordine dell' intervallo  $[0, u]$  sia reticolare.

**Lemma 4.13** *Siano  $a_1, \dots, a_n \in [0, u]$ . Allora  $\langle a_1 \vee \dots \vee a_n \rangle = \langle a_1 + \dots + a_n \rangle = \langle a_1 \rangle + \dots + \langle a_n \rangle$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La seconda identità è stata provata nella dimostrazione della Proposizione 3.16. La prima identità segue da  $0 \leq a_1 \vee \dots \vee a_n \leq a_1 + \dots + a_n \leq n(a_1 + \dots + a_n)$ .  $\blacksquare$

**Lemma 4.14** *Siano  $a_1, \dots, a_n \in [0, u]$ . Allora  $\langle a_1 \wedge \dots \wedge a_n \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \dots \cap \langle a_n \rangle$ .*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare l'asserto per  $n = 2$ ; siano  $a = a_1, b = a_2$ .  
 Caso 1.  $a \wedge b = 0$ . Sia  $c \in \langle a \rangle^+ \cap \langle b \rangle^+$ , e siano  $h, k \in \mathbf{N}$  tali che  $0 \leq c \leq ha, kb$ . Per [Fuc65, p. 10(b)], in  $G$  esistono sia  $a \wedge kb$  che  $ha \wedge kb$ , ed entrambi sono uguali a 0. Quindi  $c = 0$  e  $\langle a \rangle^+ \cap \langle b \rangle^+ = \langle 0 \rangle^+$ . Per l'isomorfismo fra Faces  $G^+$  e Ideals  $G$ ,  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle 0 \rangle = \langle a \wedge b \rangle$ .

Caso 2.  $a \wedge b > 0$ . Siano  $a' = a - (a \wedge b)$  e  $b' = b - (a \wedge b)$ ; allora  $a' \wedge b' = 0$ . Di conseguenza

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \cap \langle b \rangle &= (\langle a' \rangle + \langle a \wedge b \rangle) \cap (\langle b' \rangle + \langle a \wedge b \rangle), && \text{per il Lemma 4.13;} \\ &= (\langle a' \rangle \cap \langle b' \rangle) + \langle a \wedge b \rangle, && \text{per distributività;} \\ &= \langle a \wedge b \rangle, && \text{per il Caso 1.} \end{aligned}$$

■

**Lemma 4.15** *Gli aperti compatti di  $\text{Spec } G$  sono esattamente gli  $O_a$ , per  $a \in [0, u]$ . Essi formano una base per  $\text{Spec } G$ .*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 3.16, ogni aperto compatto di  $\text{Spec } G$  è della forma  $O_b$ , per qualche  $b \in G^+$ . Sia  $b \leq nu$ . Per la Proposizione 3.10(2), esistono  $c_1, \dots, c_n \in [0, u]$  con  $b = c_1 + \dots + c_n$ . Quindi, per il Lemma 4.13,  $O_b = O_{c_1 + \dots + c_n} = O_{\langle c_1 + \dots + c_n \rangle} = O_{\langle c_1 \vee \dots \vee c_n \rangle} = O_{c_1 \vee \dots \vee c_n}$ . L'ultima affermazione segue dalla Proposizione 3.16. ■

**Corollario 4.16** *L'intersezione di due compatti aperti di  $\text{Spec } G$  è compatta.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $O_a, O_b$  due compatti aperti di  $\text{Spec } G$ , con  $a, b \in [0, u]$ . Poiché l'ordine di  $[0, u]$  è reticolare,  $a \wedge b$  esiste. A pagina 38 abbiamo dimostrato che l'applicazione  $H \mapsto O_H$  è un'isomorfismo fra il reticolo degli ideali di  $G$  ed il reticolo degli aperti di  $\text{Spec } G$ . Dal Lemma 4.14 segue quindi  $O_a \cap O_b = O_{\langle a \rangle} \cap O_{\langle b \rangle} = O_{\langle a \rangle \cap \langle b \rangle} = O_{\langle a \wedge b \rangle} = O_{a \wedge b}$ . ■

**Lemma 4.17** *Sia  $p \in \text{Spec } G$ . Allora  $G/p$  è totalmente ordinato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $U = [0/p, u/p]$  l'intervallo unitario di  $G/p$ . Supponiamo per assurdo che  $\alpha, \beta \in U$  siano inconfrontabili e che  $\alpha \wedge \beta$  esista in  $U$ . Siano  $\alpha' = \alpha - (\alpha \wedge \beta)$ ,  $\beta' = \beta - (\alpha \wedge \beta)$ ; allora  $\alpha' \neq 0$ ,  $\beta' \neq 0$ ,  $\alpha' \wedge \beta' = 0$ . Per [Fuc65, 5.7], esistono  $a, b \in [0, u]$  tali che  $\alpha' = a/p$  e  $\beta' = b/p$ . Poiché sia  $\alpha'$  che  $\beta'$  sono diversi da 0, abbiamo  $a \notin p$  e  $b \notin p$ , e quindi  $\langle a \rangle \not\subseteq p$  e  $\langle b \rangle \not\subseteq p$ . Poiché  $p$  è primo,  $\langle a \wedge b \rangle = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle \not\subseteq p$  e  $a \wedge b \notin p$ . Tuttavia, per [Fuc65, p. 13(E)], l'elemento  $a/p \wedge b/p$  esiste in  $G/p$  ed è uguale a  $(a \wedge b)/p$ . Poiché  $\alpha' \wedge \beta' = 0$ , abbiamo  $(a \wedge b)/p = 0/p$ , da cui  $a \wedge b \in p$ , che è una contraddizione. Abbiamo dimostrato che  $U$  è un antireticolo. Per dimostrare che  $G/p$  è totalmente ordinato, siano  $\alpha = a/p$  e  $\beta = b/p$  elementi di  $U$ . Di nuovo per [Fuc65, 5.7, p. 13(E)], possiamo assumere  $a, b \in [0, u]$ , ed abbiamo  $\alpha \wedge \beta = a/p \wedge b/p = (a \wedge b)/p$ . Poiché  $U$  è un antireticolo,  $\alpha$  e  $\beta$  sono confrontabili,



e quindi  $U$  è totalmente ordinato. Poiché  $G/p$  è un gruppo di Riesz con unità forte  $u/p$ , per dimostrare che  $G/p$  è totalmente ordinato è sufficiente dimostrare che, per ogni  $n \in \mathbf{N}$  ed ogni  $\gamma \in [-2^n u/p, 2^n u/p]$ ,  $\gamma$  è confrontabile con  $0/p$ . Induzione su  $n$ : *Passo base.* Se  $\gamma \in [-u/p, u/p]$  allora, per la Proposizione 3.10(3),  $\gamma = \alpha - \beta$  per qualche  $\alpha, \beta \in U$ . Se  $\alpha \geq \beta$ , allora  $\gamma \geq 0$ ; altrimenti, poiché  $U$  è totalmente ordinato,  $\gamma < 0$ .

*Passo induttivo.* Sia  $\gamma \in [-2^{n+1}u/p, 2^{n+1}u/p]$ . Sempre per la Proposizione 3.10(3),  $\gamma = \alpha + \beta$ , per certi  $\alpha, \beta \in [-2^n u/p, 2^n u/p]$ ; quest'ultimo intervallo è totalmente ordinato per ipotesi induttiva. Se  $\alpha, \beta \geq 0$ , allora  $\gamma \geq 0$ , e se  $\alpha, \beta \leq 0$ , allora  $\gamma \leq 0$ . Altrimenti, senza perdita di generalità,  $-2^n u/p \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq 2^n u/p$ , da cui  $-2^n u/p \leq \gamma \leq 2^n u/p$ , e  $\gamma$  è confrontabile con  $0$  in ogni caso. ■

**Teorema 4.18** *Sia  $G$  un gruppo di Riesz con unità forte  $u$ , e supponiamo che l'ordine dell'intervallo  $[0, u]$  sia reticolare. Allora  $G$  è un  $\ell$ -gruppo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il Corollario 4.16, il Lemma 4.17, e [EM93, Theorem 1]. ■

Completiamo adesso la dimostrazione del Teorema 4.7(2). Sia  $\mathcal{A}$  una AF  $C^*$ -algebra unitaria tale che  $D(\mathcal{A})$  ha ordine reticolare, e sia  $(G, u)$  il limite del sistema (\*\*\*) di pagina 55 associato ad  $\mathcal{A}$ . Per [Ell76], la scala  $D = [0, u]$  di  $G$  può essere identificata con  $D(\mathcal{A})$ , in modo tale che l'ordine di Murray-von Neumann su  $D(\mathcal{A})$  coincide con l'ordine su  $D$  indotto da  $G$ , e la somma parziale di Elliott su  $D(\mathcal{A})$  coincide con la restrizione della somma di  $G$  alle coppie di elementi  $a, b \in D$  tali che  $a + b \in D$ . Per ipotesi,  $D$  ha ordine reticolare e quindi, per il Teorema 4.18,  $G$  è un  $\ell$ -gruppo. Sia  $\oplus$  la somma su  $D(\mathcal{A})$  indotta —nell'identificazione fra  $D(\mathcal{A})$  e  $D$ — dalla somma di Lukasiewicz  $\oplus$  della MV-algebra  $\Gamma(G, u)$ . Allora  $\oplus$  è un'estensione della somma di Elliott; infatti  $a + b$  è definita in  $D(\mathcal{A}) = D$  se e soltanto se  $a + b \leq u$  in  $G$  se e soltanto se  $a + b = a \oplus b$ . La somma  $\oplus$  è associativa, commutativa, e monotona rispetto all'ordine di  $D$ . Sia  $p \in \mathcal{A}$  una proiezione,  $a$  l'elemento di  $D$  corrispondente a  $[p]$ ,  $b$  quello corrispondente a  $[1_{\mathcal{A}} - p]$ . Sempre per [Ell76],  $b = u - a$ . Sia  $c \in D$  tale che  $a \oplus c = u$ . Allora  $a + c \geq u$  in  $G$  e  $c \geq u - a = b$ ; quindi  $\oplus$  è residuale. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 4.7(2).

### Dimostrazione del Teorema 4.8

Sia  $\mathcal{A}$  una AF  $C^*$ -algebra il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare. Sia  $(G, u) = (K_0(\mathcal{A}), [1_{\mathcal{A}}])$  il limite del sistema (\*\*\*) associato ad  $\mathcal{A}$ , ed identifichiamo  $D(\mathcal{A})$  con la scala  $D = [0, u]$  di  $G$ . Per il Teorema 4.18  $G$  è un  $\ell$ -gruppo; inoltre, l'ordine su  $D(\mathcal{A})$  coincide con l'ordine indotto da  $G$  su  $D$ , e la somma  $\oplus$  data dal Teorema 4.7(2) coincide con l'operazione  $a \oplus b = (a + b) \wedge u$ . Per il Lemma 4.9 e le osservazioni che lo seguono, sia la struttura d'ordine su  $D(\mathcal{A})$  che l'operazione  $\neg$  possono essere univocamente recuperate dal semigruppato  $(D(\mathcal{A}), \oplus)$ . Dimostriamo che anche il dominio  $E \subseteq D(\mathcal{A}) \times D(\mathcal{A})$  della somma di Elliott può essere recuperato da  $(D(\mathcal{A}), \oplus)$ .

**Lemma 4.19**  $(a, b) \in E$  se e soltanto se  $\neg(\neg a \oplus \neg b) = [0]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $a, b \in D(\mathcal{A})$ . Identifichiamo  $D(\mathcal{A})$  con la scala  $D$  di  $G$ ; in questa identificazione,  $\neg a = u - a$ . Usiamo  $+$  per denotare la somma in  $G$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} a + b &= u + (a + b - u); \\ &= u + (0 \wedge (a + b - u)) + (0 \vee (a + b - u)), && \text{per la Proposizione 3.2(5);} \\ &= (u \wedge (a + b)) + u + (-u \vee (a - u + b - u)), && \text{per distributività;} \\ &= (a \oplus b) + u - (u \wedge (u - a + u - b)), && \text{per la Proposizione 3.2(4);} \\ &= (a \oplus b) + \neg(\neg a \oplus \neg b). \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} (a, b) \in E &\iff a + b \leq u \\ &\iff a + b = a \oplus b \\ &\iff \neg(\neg a \oplus \neg b) = 0 \end{aligned}$$

■

Abbiamo dimostrato che il semigrupplo locale di Elliott  $(D(\mathcal{A}), +)$  può essere univocamente recuperato dal semigrupplo  $(D(\mathcal{A}), \oplus)$  dato dal Teorema 4.7(2). Ne segue che, se  $(D(\mathcal{A}_1), \oplus)$  e  $(D(\mathcal{A}_2), \oplus)$  sono isomorfi, allora  $(D(\mathcal{A}_1), +)$  e  $(D(\mathcal{A}_2), +)$  sono isomorfi. Poiché il semigrupplo locale di Elliott è un invariante completo per la AF  $C^*$ -algebre unitarie [Ell76],  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  sono isomorfe. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 4.8.

### Dimostrazione del Teorema 4.10

Sia  $\mathcal{A}$  una AF  $C^*$ -algebra il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare, sia  $(G, u) = (K_0(\mathcal{A}), [1_{\mathcal{A}}])$  il limite del sistema (\*\*\*) associato ad  $\mathcal{A}$ ,  $D = [0, u]$  la scala di  $G$ . Come sopra, identifichiamo  $D(\mathcal{A})$  con  $D$ . Poiché  $D$  ha per ipotesi ordine reticolare,  $G$  è un  $\ell$ -grupplo per il Teorema 4.18, e l'algebra  $(D(\mathcal{A}), \oplus, \neg, 0)$  dell'enunciato del Teorema è identificabile con la MV-algebra  $\Gamma(G, u)$ , che è numerabile per costruzione.

Sia  $N = (N, \oplus, \neg, 0)$  un' arbitraria MV-algebra numerabile. Per il Teorema 3.8, esiste un unico  $\ell$ -grupplo  $G$  con unità forte  $u$  tale che  $N \simeq \Gamma(G, u)$ ; inoltre,  $G$  è numerabile. Per [Ell76], [Goo82, 20.7, 21.10], [Eff81, 3.1], esiste un' unica (a meno di isomorfismo) AF  $C^*$ -algebra unitaria  $\mathcal{A}$  tale che  $(G, u) \simeq (K_0(\mathcal{A}), [1_{\mathcal{A}}])$ . Ne segue che il semigrupplo locale di Elliott  $(D(\mathcal{A}), +)$  è identificabile con  $N$ , in modo tale che l'ordine di Murray-von Neumann di  $D(\mathcal{A})$  coincide con l'ordine reticolare di  $N$ , e la somma parziale  $+$  su  $D(\mathcal{A})$  coincide con la restrizione della somma di  $G$  alle coppie  $(a, b) \in N \times N$  tali che  $a + b \leq u$ . La somma di Łukasiewicz  $\oplus$  su  $N$  è un'estensione associativa, commutativa, monotona e residuale della somma parziale  $+$  indotta su  $N$  come sopra. Per il Teorema 4.7(1), le due strutture  $(D(\mathcal{A}), \oplus, \leq)$  e

$(N, \oplus, \leq)$  sono isomorfe. Per ogni  $a \in N$ , la sua negazione di Łukasiewicz  $\neg a$  è il minimo elemento  $b \in N$  per cui  $a \oplus b = 1$ ; questo segue dalla Proposizione 2.10(4). Di conseguenza, la struttura  $(D(\mathcal{A}), \oplus, \neg, 0)$  dell' enunciato del Teorema 4.10 è isomorfa alla MV-algebra  $N$ , e l' applicazione  $\mathcal{A} \mapsto (D(\mathcal{A}), \oplus, \neg, 0)$  è suriettiva. Il Teorema 4.8 implica immediatamente che si tratta di un' applicazione iniettiva; questo completa la dimostrazione del Teorema 4.10.

### Esempi

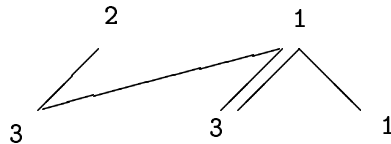
In letteratura ci sono numerosi esempi di AF  $C^*$ -algebre il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare. In particolare, ricordiamo i seguenti.

1. Tutte le AF  $C^*$ -algebre con confrontabilità di proiezioni (ovvero, in cui l' ordine delle proiezioni è totale), fra cui le algebre UHF di Glimm [Eff81, p. 50] e le algebre  $\mathcal{F}_\theta$  di Effros-Shen [Eff81, p. 65].
2. Tutte le AF  $C^*$ -algebre liminari il cui spettro degli ideali primitivi è Hausdorff [CEM93]; in particolare, le AF  $C^*$ -algebre commutative, quelle di dimensione finita, e quelle la cui traccia è continua.
3. Tutte le AF  $C^*$ -algebre di Behncke-Leptin aventi uno spazio duale di due soli punti [BL72], [Mun92].
4. Le AF  $C^*$ -algebre  $\mathcal{M}_1$  di [Mun88, §3] e  $\mathcal{M}$  di [Mun86, §8]. Per [Mun86, 8.9, 4.16(iii)], [Eff81, 9.1], e il Teorema 4.18, ogni AF  $C^*$ -algebra il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare è un quoziente di  $\mathcal{M}$ .

Notiamo infine che, per [Mun86, 1.3], ogni AF  $C^*$ -algebra è una sottoalgebra di una AF  $C^*$ -algebra il cui ordine di Murray-von Neumann è reticolare.

### 4.2 Diagrammi di Bratteli

Riprendiamo in esame l' omomorfismo  $\varphi$  dell' Esempio 4.2. L' informazione caratterizzante  $\varphi$  è esprimibile nel seguente diagramma:



La riga superiore e quella inferiore corrispondono rispettivamente ai vettori  $u_A$  e  $u_B$ , mentre il numero degli spigoli che connettono l'  $i$ -esimo elemento della riga superiore con il  $j$ -esimo di quella inferiore è dato dall' elemento  $m_i^j$  di  $M_\varphi$ . La disuguaglianza

$u_B \geq M_\varphi u_A$  corrisponde al fatto che ogni nodo della riga inferiore è etichettato da un numero maggiore o uguale alla somma dei numeri etichettanti i nodi della riga superiore, ciascuno moltiplicato per il numero degli spigoli di connessione. Dato un sistema (\*) come nella Definizione 4.3, colleghiamo in modo ovvio i diagrammi associati a ciascun  $\varphi_i$ , ottenendo il *diagramma di Bratteli* del sistema [Bra72], [HJ80], [Eff81], [Bla86].

**Definizione 4.20** Un *diagramma di Bratteli* è una successione  $\mathcal{D} = \{(n_i, x_i, M_i) : i \in \mathbf{N}\}$  tale che, per ogni  $i$ ,  $n_i \in \mathbf{N}$ ,  $x_i$  è un vettore colonna di  $\mathbf{N}^{n_i}$ ,  $M_i$  è una matrice  $n_{i+1} \times n_i$  ad elementi in  $\mathbf{Z}^+$  priva di 0-colonne (colonne composte interamente da zeri), e  $M_i x_i \leq x_{i+1}$ .  $\mathcal{D}$  è *unitario* se, per ogni  $i$ , vale l'identità  $M_i x_i = x_{i+1}$  (ne segue che nessun  $M_i$  contiene 0-righe).  $\mathcal{D}$  è *ultrasimpliciale* se è unitario e ogni  $M_i$  ha rango  $n_i$ .

In pratica identifichiamo un diagramma di Bratteli con il corrispondente grafo etichettato. Chiamiamo *nodi di livello  $i$*  i nodi etichettati dagli elementi di  $x_i$ , mentre un *discendente immediato* di un nodo  $a$  di livello  $i$  è un nodo di livello  $i + 1$  che sia collegato ad  $a$  da almeno uno spigolo. Se  $a, b$  sono nodi ed esiste una catena  $a = c_1, \dots, c_r = b$  tale che ogni  $c_{i+1}$  è un discendente immediato di  $c_i$ , diciamo che  $b$  è un *discendente* di  $a$ .

**Esempio 4.21** Consideriamo il diagramma unitario

$$\begin{array}{c} 1 \\ || \\ 2 \\ || \\ 4 \\ || \\ 8 \\ \vdots \end{array}$$

Dal punto di vista delle AF  $C^*$ -algebre, ad esso corrisponde il sistema

$$\text{Mat}_1(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Mat}_4(\mathbf{C}) \rightarrow \dots$$

in cui  $\text{Mat}_{2^i}(\mathbf{C})$  si immerge in  $\text{Mat}_{2^{i+1}}(\mathbf{C})$  come  $\text{Mat}_{2^i}(\mathbf{C}) \oplus \text{Mat}_{2^i}(\mathbf{C})$ . La  $C^*$ -algebra limite è la CAR algebra di [Bra72, p. 227], [Eff81, p. 13]. Dal punto di vista dei dimension groups con unità forte, abbiamo il sistema

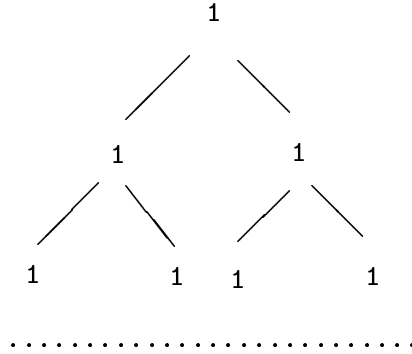
$$(\mathbf{Z}, (1)) \xrightarrow{(2)} (\mathbf{Z}, (2)) \xrightarrow{(2)} (\mathbf{Z}, (4)) \xrightarrow{(2)} \dots$$

Quest' ultimo è equivalente al sistema di inclusioni

$$(\mathbf{Z}1, 1) \subseteq (\mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}, 1) \subseteq (\mathbf{Z}^{\frac{1}{4}}, 1) \subseteq \dots$$

il cui limite è il gruppo  $(\mathbf{Z}(2^\infty), 1)$  dei razionali diadici con unità forte 1 [Eff81, p. 28], [Bla86, p. 59]. Gli elementi di  $\mathbf{Z}(2^\infty)$  sono i numeri razionali il cui denominatore è una potenza di 2, dotati dell'ordine naturale. Applicando il funtore  $\Gamma$ , otteniamo la MV-algebra  $\Gamma(\mathbf{Z}(2^\infty), 1)$  di [Mun89a].

**Esempio 4.22** Consideriamo il diagramma



La AF  $C^*$ -algebra corrispondente è la  $C^*$ -algebra commutativa  $C(2^\omega)$  di tutte le funzioni continue dallo spazio di Cantor  $2^\omega$  a  $\mathbf{C}$  [HJ80, p. 26], [Eff81, p. 28]. Come dimension group, otteniamo il limite del sistema

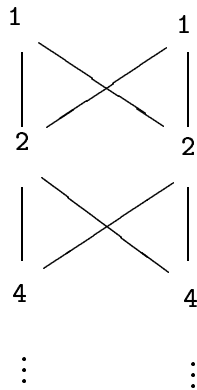
$$(\mathbf{Z}, (1)) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} (\mathbf{Z}^2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} (\mathbf{Z}^4, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \longrightarrow \dots$$

ovvero il gruppo reticolare di tutte le funzioni continue da  $2^\omega$  a  $\mathbf{Z}$ , con unità forte la funzione identicamente 1. La corrispondente MV-algebra è ovviamente l'algebra di Lindenbaum con  $\omega$  generatori della logica booleana. Questo è un caso particolare di [Mun89a, Proposition 5.2], secondo cui MV-algre booleane corrispondono ad AF  $C^*$ -algre commutative.

**Definizione 4.23** Due diagrammi di Bratteli  $\mathcal{D} = \{(n_i, x_i, M_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$  e  $\mathcal{D}' = \{(n'_i, x'_i, M'_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$  sono *equivalenti* se esistono un diagramma  $\mathcal{E} = \{(m_j, y_j, N_j)\}_{j \in \mathbf{N}}$  e una funzione strettamente crescente  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  tali che:

1. se  $j$  è dispari,  $m_j = n_{f(j)}$ ,  $y_j = x_{f(j)}$ ,  $N_{j+1}N_j = M_{f(j+2)-1} \cdots M_{f(j)}$ ;
2. se  $j$  è pari,  $m_j = n'_{f(j)}$ ,  $y_j = x'_{f(j)}$ ,  $N_{j+1}N_j = M'_{f(j+2)-1} \cdots M'_{f(j)}$ .

**Esempio 4.24** Il diagramma dell' Esempio 4.21 è equivalente al diagramma



**Teorema 4.25** Due AF  $C^*$ -algebre sono isomorfe sse i corrispondenti diagrammi di Bratteli sono equivalenti. Algebre unitarie corrispondono a diagrammi unitari. Assumiamo che la AF  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  sia unitaria e che il suo ordine di Murray-von Neumann sia reticolare; sia  $\mathcal{D}$  un diagramma per  $\mathcal{A}$ . Allora  $\mathcal{D}$  induce l'  $\ell$ -gruppo con unità forte  $(K_0(\mathcal{A}), [1_{\mathcal{A}}])$  e la MV-algebra  $\Gamma(K_0(\mathcal{A}), [1_{\mathcal{A}}])$ ; questi ultimi sono univocamente determinati dalla classe di equivalenza di  $\mathcal{D}$ . Ogni  $\ell$ -gruppo numerabile con unità forte, e ogni MV-algebra numerabile, è indotto da un opportuno diagramma.

**DIMOSTRAZIONE.** Diagrammi equivalenti corrispondono ad AF  $C^*$ -algebre isomorfe per [Bra72], [LT80, Theorem 2.12]. Le altre affermazioni seguono dai Teoremi 4.5 e 4.10. ■

In [Bla86, p. 55], Blackadar osserva "... one major problem restricts the usefulness of the study of AF algebras by diagrams: many quite different diagrams yield isomorphic algebras, and there is no known reasonable algorithm for ... determining when two diagrams give isomorphic algebras". Di fatto, l' informazione convogliata da un diagramma di Bratteli è di gran lunga troppo complessa per risultare decidibile. Naturalmente, il problema principale consiste nel formulare una nozione ragionevole di "presentazione effettiva" di un diagramma. Per quanto ci risulta, questo problema non è stato ancora trattato nella letteratura. In un approccio naïve, viene naturale assumere come presentazione effettiva di un diagramma  $\mathcal{D} = \{(n_i, x_i, M_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$  il numero di codice di una macchina di Turing deterministica che enumeri le triple  $(n_i, x_i, M_i)$ . Sotto questa definizione, il problema di decidere se, dati due codici, i diagrammi corrispondenti sono equivalenti, è chiaramente indecidibile. Questo risulta o dal teorema di Rice (la classe di tutti i codici dei diagrammi equivalenti ad un diagramma dato è non banale), o riducendo il problema dell' arresto al problema dell' equivalenza. Sia infatti  $f$  una funzione che associa ad ogni

$u \in \mathbf{N}$  il codice di un diagramma  $\mathcal{D}_u = \{(n_i, x_i, M_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$  così definito:

$$(n_i, x_i, M_i) = \begin{cases} (1, (1), (1)) & \text{se } \varphi_u(u) \text{ non converge dopo } i \text{ passi di calcolo;} \\ (1, (1), (2)) & \text{se } \varphi_u(u) \text{ converge all' } i\text{-esimo passo;} \\ (1, (2), (1)) & \text{se } \varphi_u(u) \text{ converge in meno di } i \text{ passi.} \end{cases}$$

La funzione  $f$  è chiaramente ricorsiva e, per padding, possiamo assumere che sia 1-1. Sia  $X$  l'insieme dei codici dei diagrammi di Bratteli equivalenti a

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \\ | \\ 1 \\ | \\ \vdots \end{array}$$

ovvero dei diagrammi associati alla  $C^*$ -algebra  $\mathbf{C}$ . L'insieme dell'arresto è 1-riducibile a  $X$  via  $f$ ;  $X$  non è quindi ricorsivo. In [MP93a] il medesimo risultato è ottenuto tramite una riduzione del problema dell'isomorfismo per  $\ell$ -gruppi finitamente presentati al problema dell'equivalenza per diagrammi di Bratteli.

La situazione è comunque molto peggiore. Dimostreremo infatti che la relazione di equivalenza fra diagrammi unitari è  $\Sigma_1^1$  senza essere Borel.

Sia  $\mathcal{D}$  un diagramma, sia  $X$  l'insieme dei suoi nodi, e sia  $Y$  un sottoinsieme non vuoto di  $X$  tale che:

1. per ogni elemento  $a$  di  $Y$ , almeno un discendente immediato di  $a$  in  $\mathcal{D}$  sta in  $Y$ .

$\mathcal{D}$  induce in modo naturale, per restrizione, una struttura di diagramma di Bratteli  $\mathcal{D}_Y$  su  $Y$ . L'insieme dei nodi di  $\mathcal{D}_Y$  è  $Y$ , e due nodi sono connessi da uno spigolo in  $\mathcal{D}_Y$  sse lo sono in  $\mathcal{D}$ . Diciamo che  $\mathcal{D}_Y$  è un *sottodiagramma* di  $\mathcal{D}$ . Se inoltre  $Y$  è tale che:

2. se  $a \in Y$ , allora tutti i discendenti di  $a$  stanno in  $Y$ ;
3. se tutti i discendenti immediati di  $a \in X$  stanno in  $Y$ , allora  $a$  sta in  $Y$ ;

diciamo che  $\mathcal{D}_Y$  è un *ideale* di  $\mathcal{D}$ .

La struttura degli ideali di  $\mathcal{D}$  è determinata dalle sole proprietà di ordine di  $\mathcal{D}$ ; le etichette dei nodi e le molteplicità degli spigoli sono irrilevanti. L'insieme degli ideali di  $\mathcal{D}$  è chiuso per intersezioni arbitrarie, e costituisce quindi un reticolo completo.

**Teorema 4.26** [HJ80, Theorem 4.16], [Bla86, p. 57] *Sia  $\mathcal{D}$  un diagramma di Bratteli per la AF  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$ , e sia  $(G, D)$  il corrispondente scaled dimension group. Allora:*

1. il reticolo degli ideali chiusi bilateri di  $\mathcal{A}$  è isomorfo sia al reticolo degli ideali di  $G$  che al reticolo degli ideali di  $\mathcal{D}$ ;
2. se  $\mathcal{I}$  è un ideale chiuso bilatero di  $\mathcal{A}$ , l'ideale corrispondente di  $\mathcal{D}$  è quello determinato dall'insieme  $Y$  così definito:

se  $a$  è un nodo di  $\mathcal{D}$  di livello  $i$  e  $p$  è la corrispondente proiezione minimale in

$$\text{Mat}_{x_i^1}(\mathbf{C}) \times \text{Mat}_{x_i^2}(\mathbf{C}) \times \cdots \times \text{Mat}_{x_i^{n_i}}(\mathbf{C}),$$

allora  $a \in Y$  sse  $\varphi_{i\infty}(p) \in \mathcal{I}$ ;

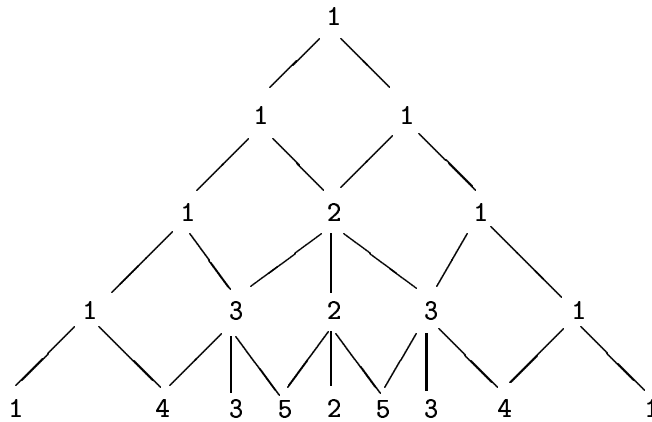
3. analogamente, se  $I$  è un ideale di  $G$ , l'ideale  $\mathcal{D}_Y$  corrispondente è determinato da:

se  $a$  è un nodo di  $\mathcal{D}$  di livello  $i$  e  $p$  è il corrispondente elemento di  $\mathbf{Z}^{n_i}$ , allora  $a \in Y$  sse  $\tilde{\varphi}_{i\infty}(p) \in I$ ;

4.  $\mathcal{D}_{X \setminus Y}$  (dove  $X$  è l'insieme dei nodi di  $\mathcal{D}$ , e  $Y$  è definito come sopra) è un diagramma associato alla AF  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  e allo scaled dimension group  $(G/I, D/I)$ . ■

Nel caso in cui l'ordine di Murray-von Neumann di  $\mathcal{A}$  sia reticolare, usando la Proposizione 3.20 estendiamo in modo naturale i risultati del Teorema precedente agli ideali delle MV-algebre.

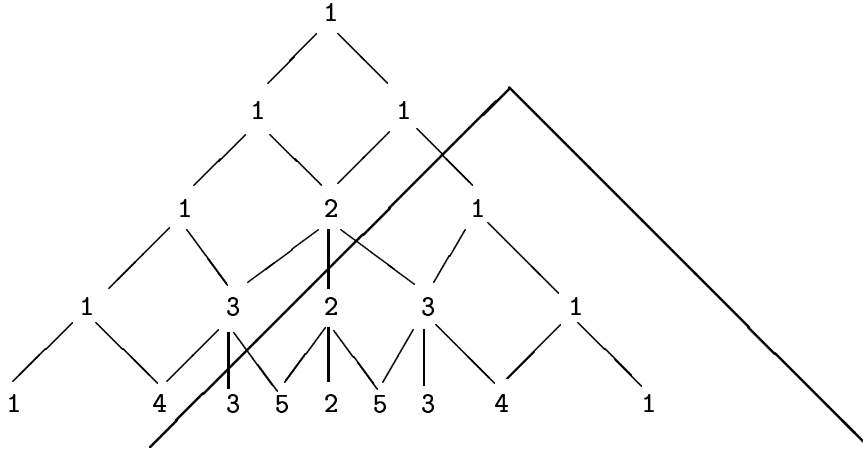
**Esempio 4.27** Sia  $\mathcal{D}$  il diagramma



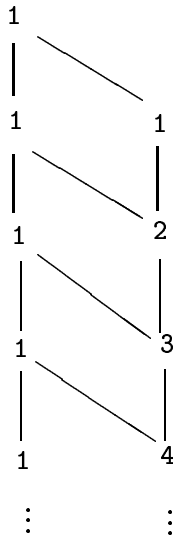
In [Mun88] si dimostra che  $\mathcal{D}$  è un diagramma per la MV-algebra libera su un generatore  $M_1$ . Sia  $I = \{a \in M_1 : a = 0 \text{ in un intorno dello } 0\}$  l'ideale dell'



Esempio 3.36. Allora l' ideale corrispondente di  $\mathcal{D}$  è determinato dall' insieme dei nodi all' interno della linea in grassetto



Il diagramma associato al quoziente  $M_1/I$ , ovvero all' algebra di Chang  $C$  dell' Esempio 3.7, è



A questo diagramma corrisponde la AF  $C^*$ -algebra  $LC(H) + \mathbf{C}1$ , dove  $LC(H)$  è la  $C^*$ -algebra degli operatori compatti su uno spazio di Hilbert separabile  $H$ . Equivalentemente,  $LC(H)$  è la chiusura in norma dell' algebra localmente semisemplice delle matrici di rango finito [Bra72, pp. 202,212], [HJ80, Example 2.14, Example 2.18(2)], [Eff81, pp. 10,13]. Per il Teorema 4.10,  $LC(H) + \mathbf{C}1$  è dunque la AF  $C^*$ -algebra univocamente determinata dall' algebra di Chang. L' unico ideale

non banale del diagramma è quello indotto dall' insieme dei nodi nella colonna di destra, e corrisponde all' ideale  $LC(H)$  di  $LC(H) + \mathbf{C}1$ , e all' ideale generato da  $(0, 1)$  in  $C$ .

Notiamo che il diagramma  $\mathcal{D}$  dell' Esempio 4.27 è universale per la classe delle MV-algebre generate da un singolo elemento: ad ogni tale MV-algebra corrisponde un opportuno sottodiagramma di  $\mathcal{D}$ . Analogamente, per ogni  $n$ , la costruzione della successione fondamentale dell'  $n$ -cubo data nel Lemma 2.14 induce un diagramma universale per la classe delle MV-algebre aventi un numero finito di generatori; tale diagramma universale è ultrasimpliciale per costruzione. Poiché quozienti di  $\ell$ -gruppi ultrasimpliciali (ovvero  $\ell$ -gruppi associati a diagrammi ultrasimpliciali) sono ultrasimpliciali [Han83, Theorem 3], ne segue che ogni  $\ell$ -gruppo finitamente generato e con unità forte è ultrasimpliciale; cfr. [Mun88, Theorem 2.1].

Torniamo adesso al problema dell' equivalenza per diagrammi di Bratteli. Dotiamo l' insieme dei diagrammi di una struttura di spazio polacco (ovvero di spazio metrico completo e separabile). Rimandiamo a [Rog67], [Mar77], [Mos80], [KL87, Chapter VI] per un' introduzione alla teoria descrittiva degli insiemi, classica ed effettiva.

Ci limitiamo a considerare la classe dei diagrammi unitari; senza perdita di generalità assumiamo che ogni diagramma abbia come primo elemento la tripla  $(1, (1), M_1)$ , con  $M_1$  matrice  $n_2 \times 1$ . Un diagramma diviene quindi una successione  $\mathcal{D} = (M_1, M_2, \dots)$  di matrici ad elementi in  $\mathbf{Z}^+$ , prive di 0-righe e di 0-colonne, e soggette all' unica condizione che, per ogni  $i$ , il prodotto  $M_{i+1}M_i$  è definito. Sia  $\mathcal{B}$  lo spazio di tali successioni. Dotiamo  $\mathcal{B}$  della seguente metrica: se  $\mathcal{D} = (M_1, M_2, \dots)$  e  $\mathcal{E} = (N_1, N_2, \dots)$  sono elementi di  $\mathcal{B}$ , poniamo

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{E}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{D} = \mathcal{E}; \\ 1/k, & \text{se } k = \min\{i : M_i \neq N_i\}. \end{cases}$$

Sotto questa metrica,  $\mathcal{B}$  è uno spazio completo e separabile: l' insieme dei diagrammi della forma  $(M_1, M_2, \dots, M_k, I, I, \dots)$ , dove  $I$  è la matrice identità di dimensione opportuna, è numerabile e denso in  $\mathcal{B}$ .

Di fatto,  $\mathcal{B}$  è ricorsivamente omeomorfo allo spazio di Baire  $\mathcal{N} = \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ . Questo può essere visto come segue: sia  $\mathbf{Mat}$  l' insieme delle matrici rettangolari ad elementi in  $\mathbf{Z}^+$  e prive di 0-righe e di 0-colonne. Siano  $f : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{Mat}$  e  $g : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{N}$  funzioni ricorsive tali che:

1.  $f$  è una biiezione e, per ogni  $k$ ,  $f(x, k)$  è una matrice avente  $k$  colonne;
2.  $g(M)$  è il numero delle righe di  $M$ .

Otteniamo una biiezione  $h : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (M_1, M_2, \dots)$  da  $\mathcal{N}$  a  $\mathcal{B}$  definita da:

$$\begin{cases} M_1 = f(x_1, 1); \\ M_{i+1} = f(x_{i+1}, g(M_i)). \end{cases}$$

Ovviamente  $h$  è ricorsiva (nel senso di [Mar77, Definition 4.7]), ed è un' isometria.

La relazione di equivalenza fra diagrammi di Bratteli è chiaramente  $\Sigma_1^1$ . È sufficiente infatti osservare che la Definizione 4.23 (in cui le triple  $(n_i, x_i, M_i)$  si riducono alle sole  $M_i$ ) è di forma  $\Sigma_1^1$ , e che la relazione di uguaglianza fra prodotti finiti di matrici è ricorsiva.

D' altro canto la stessa relazione, vista come sottoinsieme di  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ , non è Borel e quindi, a fortiori, non è aritmetica. Questo può essere visto come segue: sia  $\mathcal{D}$  il diagramma dell' Esempio 4.22,  $X$  l' insieme dei suoi nodi, e sia  $T$  un albero binario privo di rami finiti. Gli elementi di  $T$  sono sequenze binarie finite, e possiamo identificare  $T$  con un sottoinsieme di  $X$  in modo naturale. Indichiamo con  $[T]$  l' insieme dei rami di  $T$ . Allora  $[T]$  è un chiuso dello spazio di Cantor  $2^\omega$ , e ogni chiuso di  $2^\omega$  è della forma  $[T]$ , per qualche  $T$  [KL87, p. 112]. La AF  $C^*$ -algebra corrispondente a  $\mathcal{D}_T$  è l' algebra  $C([T])$  di tutte le funzioni continue da  $[T]$  a  $\mathbf{C}$ .  $\mathcal{D}_T$  e  $\mathcal{D}_{T'}$  sono equivalenti sse  $C([T])$  e  $C([T'])$  sono isomorfe sse (per il teorema di Gelfand-Naimark per  $C^*$ -algebre commutative)  $[T]$  e  $[T']$  sono omeomorfi. Poiché la relazione di omeomorfismo fra sottoinsiemi chiusi di  $2^\omega$  non è Borel, ne segue che la relazione di equivalenza fra diagrammi di Bratteli unitari non è Borel. Questo comporta molto più che non la semplice indecidibilità: anche ammettendo operazioni booleane numerabili, non è possibile decidere l' equivalenza di due diagrammi.

**Riferimenti Bibliografici**

- [AF88] M. Anderson and T. Feil. *Lattice-ordered groups*. Reidel, Dordrecht, 1988.
- [Bar77] J. Barwise, editor. *Handbook of Mathematical Logic*. Number 90 in Studies in Logic. North-Holland, 1977.
- [BB92] L. Bolc and P. Borowik. *Many-Valued Logics, I*. Springer, Berlin, 1992.
- [BE78] O. Bratteli and G. A. Elliott. Structure spaces of approximately-finite  $C^*$ -algebras, II. *J. of Functional Analysis*, 30:74–82, 1978.
- [Bir67] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. Number 25 in Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. AMS, Providence, RI, 3rd edition, 1967.
- [BJ72] T. S. Blyth and M. F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon Press, 1972.
- [BKW77] A. Bigard, K. Keimel, and S. Wolfenstein. *Groupes et anneaux réticulés*. Number 608 in Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1977.
- [BL72] H. Behncke and H. Leptin.  $C^*$ -algebras with a two-point dual. *J. of Functional Analysis*, 10:330–335, 1972.
- [Bla86] B. Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras*. Springer, New York, 1986.
- [Bra72] O. Bratteli. Inductive limits of finite dimensional  $C^*$ -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 171:195–234, 1972.
- [CEM93] R. Cignoli, G. A. Elliott, and D. Mundici. Reconstructing  $C^*$ -algebras from their Murray-von Neumann orders. *Advances in Math.*, 101(2):166–179, 1993.
- [Cha58a] C. C. Chang. Proof of an axiom of Łukasiewicz. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87:55–56, 1958.
- [Cha58b] C. C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 88:467–490, 1958.
- [Cha59] C. C. Chang. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93:74–80, 1959.
- [Cig92] R. Cignoli. Free lattice-ordered abelian groups and varieties of MV-algebras. In Abad M., editor, *Latin America Symp. Logic*. Univ. National del Sur, Bahia Blanca, 1992.
- [CM] R. Cignoli and D. Mundici. MV-algebras. In Dubois et al. [DPH]. In preparation.

- [Dan78] V. I. Danilov. The geometry of toric varieties. *Russian Math. Surveys*, 33(2):97–154, 1978.
- [DCP85] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties, II. In R. Hotta, editor, *Algebraic Groups and Related Topics*, number 6 in Adv. Studies in Pure Math., pages 481–513. Kinokuniya and North-Holland, 1985.
- [DNGP] A. Di Nola, R. Grigolia, and G. Panti. Finitely generated free MV-algebras and their automorphism groups. In preparation.
- [DPH] D. Dubois, H. Prade, and U. Höhle, editors. *International Handbook on Fuzzy Logic*. Kluwer, Dordrecht. In preparation.
- [DT91] J. P. Dalahaye and V. Thibau. Programming in three-valued logic. *Theoret. Comp. Sci.*, 78:189–246, 1991.
- [DW39] R. P. Dilworth and M. Ward. Residuated lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45:335–354, 1939.
- [Eff81] E. G. Effros. *Dimensions and  $C^*$ -algebras*. Number 46 in C.B.M.S. Regional Conf. Series in Math. AMS, Providence, RI, 1981.
- [Eli76] G. A. Elliott. On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras. *J. of Algebra*, 38:29–44, 1976.
- [EM93] G. A. Elliott and D. Mundici. A characterization of lattice-ordered abelian groups. *Math. Z.*, 213:179–185, 1993.
- [Fit90] M. Fitting. Bilattices in logic programming. In *Proc. 20th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, pages 238–246. IEEE Press, 1990.
- [Fit91] M. Fitting. Bilattices and the semantics of logic programming. *J. Logic Programming*, 11(1,2):91–116, 1991.
- [Fuc65] L. Fuchs. Riesz groups. *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 19:1–34, 1965.
- [Gin88] M. L. Ginsberg. Multivalued logics: a uniform approach to reasoning in artificial intelligence. *Comput. Intell.*, 4:265–316, 1988.
- [Gog67] J. A. Goguen. L-fuzzy sets. *J. Math. Anal. Appl.*, 18:145–174, 1967.
- [Goo82] K. R. Goodearl. *Notes on Real and Complex  $C^*$ -Algebras*. Number 5 in Shiva Math. Series. Birkhäuser, Boston, 1982.
- [Got] S. Gottwald. Multiple-valued logics. In Dubois et al. [DPH]. In preparation.
- [Got89] S. Gottwald. *Mehrwertige Logik*. Akademie-Verlag, Berlin, 1989.

- [Häh93] R. Hähnle. *Automated Proof Search in Multiple-Valued Logics*. Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [Han83] D. Handelman. Ultrasimplicial dimension groups. *Arch. Math.*, 40:109–115, 1983.
- [HJ80] K. H. Hofmann and Thayer F. J. Approximately finite-dimensional  $C^*$ -algebras. *Dissertationes Mathematicae*, 174:1–64, 1980.
- [HK93] R. Hähnle and W. Kernig. Verification of switch level designs with many-valued logic. In A. Voronkov, editor, *Logic Programming and Automated Reasoning. Proceedings LPAR'93*, number 698 in LNAI, pages 158–169. Springer, Berlin, 1993.
- [Kaw94] Y. Kawano. On the structure of complete MV-algebras. *J. of Algebra*, 163:773–776, 1994.
- [KL87] A. S. Kechris and A. Louveau. *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness*. Number 128 in London Math. Soc. Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1987.
- [Kör76] S. Körner, editor. *Philosophy of logic*. Blackwell, Oxford, 1976.
- [Lan93] S. Lang. *Algebra*. Addison-Wesley, 3rd edition, 1993.
- [LT80] A. J. Lazar and D. C. Taylor. Approximately finite dimensional  $C^*$ -algebras and Bratteli diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 259:599–619, 1980.
- [Łu20] J. Łukasiewicz. O logice trójwartościowej. *Ruch Filozoficzny*, 5:169–171, 1920. Translated in [McC67].
- [Mal93] G. Malinowski. *Many-Valued Logics*. Oxford University Press, 1993.
- [Man73] P. Mangani. Su certe algebre connesse con logiche a più valori. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 8(1):68–78, 1973.
- [Mar77] D. A. Martin. Descriptive set theory: projective sets. In Barwise [Bar77], pages 783–815.
- [McC67] S. McCall. *Polish Logic 1920–1939*. Oxford University Press, 1967.
- [McN51] R. McNaughton. A theorem about infinite-valued sentential logic. *J. of Symbolic Logic*, 16:1–13, 1951.
- [Mer58] C. A. Meredith. The dependence of an axiom of Łukasiewicz. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87:54, 1958.

- [MKS76] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory*. Dover, New York, 1976.
- [Mos80] Y. N. Moschovakis. *Descriptive Set Theory*. North-Holland, 1980.
- [MP76] J. Menu and J. Pavelka. A note on tensor products on the unit interval. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 17:71–83, 1976.
- [MP93a] D. Mundici and G. Panti. The equivalence problem for Bratteli diagrams. Technical Report 259, Dipartimento di Matematica dell' Università di Siena, 1993.
- [MP93b] D. Mundici and G. Panti. Extending addition in Elliott's local semigroup. *J. of Functional Analysis*, 117(2):461–472, 1993.
- [MP94] D. Mundici and M. Pasquetto. A proof of the completeness of the infinite-valued calculus of Łukasiewicz with one variable. In U. Höhle and E. P. Klement, editors, *Non Classical Logics and Their Applications*. Kluwer, Dordrecht, 1994.
- [Mun86] D. Mundici. Interpretation of AF  $C^*$ -algebras in Łukasiewicz sentential calculus. *J. of Functional Analysis*, 65:15–63, 1986.
- [Mun87] D. Mundici. Satisfiability in many-valued sentential logic is NP-complete. *Theoret. Comp. Sci.*, 52:145–153, 1987.
- [Mun88] D. Mundici. Farey stellar subdivisions, ultrasimplicial groups, and  $K_0$  of AF  $C^*$ -algebras. *Advances in Math.*, 68(1):23–39, 1988.
- [Mun89a] D. Mundici. The  $C^*$ -algebras of three-valued logic. In Ferro, Bonotto, Valentini, and Zanardo, editors, *Logic Colloquium '88*, pages 61–77. North-Holland, 1989.
- [Mun89b] D. Mundici. The logic of Ulam's game with lies. In *Proceedings of the Conference on Knowledge, Belief and Strategic Interaction*, Cambridge Studies Series in Probability, Induction and Decision Theory. Cambridge University Press, 1989.
- [Mun92] D. Mundici. Turing complexity of Behncke-Leptin  $C^*$ -algebras with a two-point dual. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 6:287–294, 1992.
- [Mun94] D. Mundici. A constructive proof of McNaughton's theorem in infinite-valued logic. *J. of Symbolic Logic*, 59:596–602, 1994.
- [Oda78] T. Oda. *Lectures on Torus Embeddings and Applications*. Springer, Berlin, 1978.

- [Oda88] T. Oda. *Convex Bodies and Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, 1988.
- [Pan] G. Panti. Multi-valued logic. In D. Gillies and P. Smets, editors, *Quantified Representation of Uncertainty*, Handbook of Defensible Reasoning and Uncertainty Management Systems. Kluwer. In preparation.
- [Pan92] G. Panti. The logic of partially ordered abelian groups with strong unit. In *Atti del XV Incontro di Logica Matematica di Camerino*, pages 85–107. 1992.
- [Pan95] G. Panti. A geometric proof of the completeness of the Lukasiewicz calculus. *J. of Symbolic Logic*, 1995. To appear.
- [Pav79] J. Pavelka. On fuzzy logic I,II,III. *Z. math. Logic Grundlag. Math.*, 25:45–52,119–134,447–464, 1979.
- [Res69] N. Rescher. *Many-Valued Logic*. McGraw-Hill, New York, 1969.
- [Rog67] H. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, 1967.
- [RR58] A. Rose and J. B. Rosser. Fragments of many-valued sentential calculus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87:1–53, 1958.
- [RS72] C. P. Rourke and B. J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer, Berlin, 1972.
- [Sco76] D. Scott. Does many-valued logic have any use? In Körner [Kör76], pages 64–74.
- [Sem82] Z. Semadeni. *Schauder Bases in Banach Spaces of Continuous Functions*. Number 918 in Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1982.
- [Sta94] Z. Stachniak. Resolution proof systems: an algebraic theory. Technical report, Dept. of Computer Science, York University, September 1994. To appear.
- [Urq86] A. Urquhart. Many-valued logic. In *Handbook of Philosophical Logic*, volume III, pages 71–116. Reidel, Dordrecht, 1986.