Teoria degli insiemi

Giovanni Panti

1 Linguaggio ed assiomi

Come teoria al primo ordine, il linguaggio della teoria degli insiemi è dato dai due simboli di predicato binario $\in, =$. Questi sono gli assiomi:

1. (Esistenza) Esiste un insieme.
2. (Estensionalità) Due insiemi coincidono se hanno gli stessi elementi.
3. (Coppia) Se x è un insieme e y è un insieme, allora esiste un insieme z che ha come elementi x e y e non ha altri elementi.
4. (Unione) Per ogni insieme x esiste l'insieme $\bigcup x$ che ha come elementi precisamente tutti gli y che appartengono ad almeno uno degli elementi di x.
5. (Potenza) Per ogni insieme x esiste l'insieme $\mathcal{P}(x)$ che ha come elementi tutti i sottoinsiemi di x.
6. (Separazione) Per ogni formula $\varphi(u)$ e per ogni insieme x esiste un[1] insieme y che ha come elementi precisamente gli elementi di x che soddisfano φ[2].
7. (Fondazione) Per ogni insieme $x \neq \emptyset$ esiste un insieme $y \in x$ che non ha elementi comuni con x.[3]
8. (Rimpiazzamento) Se $\varphi(u, v)$ è una formula tale che ad ogni insieme x corrisponde al più un insieme y per cui vale $\varphi(x, y)$, allora per ogni insieme z esiste l'insieme $\{w : \text{ esiste } t \in z \text{ con } \varphi(t, w)\}$.
9. (Infinito) Esiste un insieme induttivo (ovvero un $x \neq \emptyset$ tale che $y \in x$ implica $y \cup \{y\} \in x$).
10. (Scelta) Per ogni insieme $x \neq \emptyset$ con $\emptyset \notin x$ esiste una funzione $f : x \to \bigcup x$ con $f(y) \in y$.

I precedenti assiomi individuano la teoria degli insiemi ZFC (Zermelo-Fraenkel con l'assioma di scelta).

Paradosso di Russel. La classe $\mathbf{M}$ che consiste di tutti gli insiemi x per cui $x \notin x$ non può essere un insieme. Il paradosso di Russel è il motivo per cui l'assioma di separazione viene dato nella forma (6) sopra, in cui si ammette, data una formula φ, l'esistenza dell'insieme x di tutti gli oggetti *appartenenti ad un insieme già dato* e soddisfacenti φ.

Paradosso di Tarski-Banach. Con l'uso dell'assioma di scelta si può dimostrare che la palla di volume 1 in $\mathbf{R}^3$ ammette una partizione finita tale che riarrangiando i pezzi in modo diverso si ottiene una partizione della palla di volume 2 in $\mathbf{R}^3$!

[1] unico, per l'assioma di estensionalità.

[2] $y = \{z \in x : z \text{ ha la proprietà } P\}$; il fatto di prendere tutti gli z in un *insieme* x è importante perché altrimenti si rischia di uscire fuori dell'ambito degli insiemi (vedi il paradosso di Russel).

[3] per evitare insiemi patologici con $x \in x$, o catene discendenti infinite $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1 \in x_0$.

2 Ordinali

Un *buon ordine* è un poset in cui ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo; ovviamente è un ordine totale. Ogni sottoinsieme di un buon ordine x è un buon ordine; in particolare, ogni segmento iniziale proprio $x \restriction y = \{z \in x : z < y\}$ di x è un buon ordine. Notiamo che ogni segmento iniziale proprio di un buon ordine è di questa forma.

Lemma 2.1. *Ogni immersione di un ben ordinato in sé è crescente.*

Dimostrazione. Sia y minimo tale che $fy < y$. Allora $f^2y \geq fy$ (per definizione di y) e $f^2y < fy$ (perché f è un'immersione). □

Lemma 2.2. *Se due ben ordinati sono isomorfi, allora l'isomorfismo è unico. Nessun ben ordinato è isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio.*

Dimostrazione. Siano $f, g : x \to y$ isomorfismi. Se z è minimo tale che $fz < gz$, allora fz non è g di alcunché. Se $f : x \to s$ è un isomorfismo, con s segmento iniziale proprio di x, allora f non può essere crescente. □

Teorema 2.3. *(Cantor) Dati due insiemi ben ordinati x e y, vale una ed una sola delle seguenti:*

- *x ed y sono isomorfi;*
- *x è isomorfo ad un segmento iniziale proprio di y;*
- *y è isomorfo ad un segmento iniziale proprio di x.*

Dimostrazione. Consideriamo

$$f = \{(z, w) \in x \times y : x \restriction z \text{ è isomorfo a } y \restriction w\}$$

Allora f è un'immersione da un sottoinsieme di x ad un sottoinsieme di y. Sia il dominio che l'immagine di f sono segmenti iniziali di x e y, rispettivamente. È facile vedere che non possono essere entrambi propri (se lo fossero, f stessa darebbe un isomorfismo ...). □

Un insieme x è *$\in$-transitivo* se $z \in y \in x$ implica $z \in x$. Un *ordinale* è un insieme $\in$-transitivo e ben ordinato da $\in$.

Lemma 2.4.

1. *$\emptyset$ è un ordinale;*
2. *se α è un ordinale, $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ è un ordinale, esattamente il minimo ordinale cui α appartiene;*
3. *ogni ordinale è l'insieme dei suoi segmenti iniziali propri. In particolare, ogni elemento di un ordinale è un ordinale;*
4. *se α, β sono ordinali, allora $\alpha \subset \beta$ sse $\alpha \in \beta$;*
5. *due ordinali isomorfi come insiemi totalmente ordinati coincidono;*
6. *se α, β sono ordinali, allora vale esattamente una fra $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$;*
7. *se $\mathbf{X}$ è una classe non vuota di ordinali, $\bigcap \mathbf{X}$ è un ordinale, esattamente il minimo di $\mathbf{X}$;*
8. *$\mathbf{Ord}$ è una classe propria, ben ordinata da $\in$;*
9. *ogni insieme $\in$-transitivo di ordinali è un ordinale;*
10. *se x è un insieme di ordinali, $\bigcup x$ è un ordinale, esattamente il sup di x.*

Dimostrazione. (4) Sia $\gamma = \min \beta \setminus \alpha$. $\gamma \subseteq \alpha$ per definizione di γ. Sia $\delta \in \alpha$. Se fosse $\gamma = \delta$, oppure $\gamma \in \delta$, sarebbe $\gamma \in \alpha$, che è falso. Dunque $\delta \in \gamma$.
(7) È facile vedere che $\mu = \bigcap \mathbf{X}$ è un ordinale. Per ogni $\alpha \in \mathbf{X}$, è $\mu \subseteq \alpha$. Se μ fosse diverso da tutti gli α, allora apparterrebbe a tutti gli α, e dunque $\mu \in \mu$, che è impossibile per fondazione. □

Teorema 2.5. *Ogni insieme ben ordinato x è isomorfo ad uno ed un solo ordinale.*

Dimostrazione. Sia $\alpha = \{\beta \in \mathbf{Ord} : \beta$ è isomorfo ad un segmento iniziale proprio di $x\}$. È un insieme per rimpiazzamento, ed è un ordinale per (9). Pongo $f : \alpha \to x$, dove $f(\beta)$ è l'unico $y \in x$ con β isomorso a $x \restriction y$. È facile vedere che $\gamma \in \beta$ se $f\gamma < f\beta$, e che f è suriettiva. □

Ne segue che gli ordinali sono rappresentanti per le classi di isomorfismo dei buoni ordini. Dividiamo gli ordinali in tre classi:

- lo 0;
- gli ordinali α della forma $\alpha = \beta + 1$, per qualche ordinale β (gli *ordinali successore*);
- gli ordinali $\lambda \neq 0$ della forma $\lambda = \bigcup \lambda$ (gli *ordinali limite*).

Lemma 2.6. *Gli ordinali successore sono quelli della forma $\alpha = \big(\bigcup \alpha\big) + 1$. Le tre classi sopra sono disgiunte e ogni ordinale appartiene ad una di esse. L'insieme*

$$\omega = \bigcap \{x : x \text{ è un insieme induttivo}\}$$

è il più piccolo ordinale limite.

Teorema 2.7. *(Induzione transfinita) Ogni classe non vuota di ordinali $\mathbf{C}$ contiene un elemento α tale che nessun elemento di α sta in $\mathbf{C}$. Dualmente: se $\mathbf{C}$ contiene lo 0, e contiene un ordinale α ogni volta che contiene tutti gli elementi di α, allora $\mathbf{C} = \mathbf{Ord}$.*

Teorema 2.8. *(Recursione transfinita) Per ogni funzione $\mathbf{G} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ esiste un'unica funzione $\mathbf{F} : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tale che*

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che $\mathbf{F}(x) = y$ è un'abbreviazione per una formula $\varphi(x, y)$ avente carattere funzionale. L'unicità è ovvia per induzione transfinita. Poniamo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) = y \quad \equiv \quad & x \text{ è un ordinale ed esiste una funzione } f \\ & \text{di dominio } x \text{ con } \forall \beta \in x\big(f(\beta) = \mathbf{G}(f \restriction \beta)\big) \text{ e inoltre } \mathbf{G}(f) = y \end{aligned}$$

Per ogni fissato $\alpha \in \mathbf{Ord}$, ZF dimostra per induzione che, se esiste una $f : \alpha \to \mathbf{V}$ tale che $\forall \beta \in \alpha\big(f(\beta) = \mathbf{G}(f \restriction \beta)\big)$, allora tale f è unica. Ne segue che $\mathbf{F}(\alpha)$, se definito, è unico. Ancora per induzione, si dimostra che, per ogni $\alpha \in \mathbf{Ord}$, esiste un f opportuno. Ne segue che $\mathbf{F}$ è una funzione totale e ben definita su $\mathbf{Ord}$, e chiaramente soddisfa quanto richiesto. □

Definiamo adesso la somma e il prodotto fra ordinali. Siano α, β ordinali, e siano A, B insiemi ben ordinati disgiunti isomorfi a α, β, rispettivamente. Introduciamo un ordine in $A \cup B$ ponendo

$$x \leq y \text{ sse } (x, y \in A \text{ e } x \leq y \text{ in } A) \text{ opp. } (x, y \in B \text{ e } x \leq y \text{ in } B) \text{ opp. } (x \in A \text{ e } y \in B)$$

Si dimostra facilmente che questo è un buon ordine; definiamo $\alpha + \beta$ come l'unico ordinale isomorfo a $(A \cup B, \leq)$. Possiamo anche dare una definizione alternativa ed equivalente per ricorsione:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \lambda &= \bigcup \{\alpha + \beta : \beta \in \lambda\} \quad \text{se } \lambda \text{ è limite} \end{aligned}$$

Per il prodotto, ordiniamo il prodotto cartesiano $A \times B$ con l'ordine lessicografico inverso, ponendo

$$(a, b) \leq (a', b') \text{ sse } (b < b' \text{ in } B) \text{ opp. } (b = b' \text{ e } a < a' \text{ in } A)$$

Definiamo $\alpha \cdot \beta$ come l'unico ordinale isomorfo a $(A \times B, \leq)$. Equivalentemente, definiamo:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda &= \bigcup \{\alpha \cdot \beta : \beta \in \lambda\} \quad \text{se } \lambda \text{ è limite} \end{aligned}$$

Rappresentiamo gli ordinali come segue:

$$\begin{array}{rcl}
0 & = & \emptyset \\
1 & = & \{\emptyset\} \\
2 & = & \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
\dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
n & = & \{0, 1, \dots, n-1\} \\
\dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega & = & \{0, 1, \dots\} \\
\omega + 1 & = & \omega \cup \{\omega\} \\
\dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega + \omega & = & \omega \cdot 2 \\
\dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega + \omega + \dots + \omega & = & \omega \cdot n \\
\dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega \cdot \omega & = & \omega + \omega + \dots \\
\dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

Esercizio 2.9. Rappresentare gli ordinali "piccoli" come sottoinsiemi di $\mathbf{R}$.

3 Assioma di scelta

Lemma 3.1. *(di scoppio) Non esiste alcuna funzione iniettiva $\mathbf{F} : \mathbf{C} \to x$ da una classe propria ad un insieme.*

Dimostrazione. Se ci fosse, $\mathbf{F}^{-1}$ definirebbe una suriezione da un sottoinsieme di x (quindi un insieme) su $\mathbf{C}$, contro l'assioma di rimpiazzamento. □

Teorema 3.2. *Sotto gli assiomi (1)–(9), l'assioma (10) di scelta è equivalente a ciascuno dei seguenti enunciati:*

1. *(Lemma di Zorn) Sia $(p, \leq)$ un poset in cui ogni catena ha un maggiorante. Allora p contiene almeno un elemento massimale;*
2. *(Teorema di Zermelo) Ogni insieme può essere ben ordinato (equivalentemente, è biiettivo ad un ordinale);*
3. *Il prodotto cartesiano di una insieme non vuoto di insiemi non vuoti è non vuoto.*

Dimostrazione. (1)⇒(2). Per ogni catena c di p, sia $\uparrow c$ l'insieme dei maggioranti di c. Sia

$$x = \{\uparrow c \setminus c : c \text{ è una catena in } p\}$$

Poiché $p \neq \emptyset$, si ha $x \neq \emptyset$. Dimostriamo che $\emptyset \in x$. Infatti, supponiamo per assurdo di no. Sia $f : x \to \bigcup x$ una funzione di scelta. Usando il teorema di ricorsione, definiamo $\mathbf{G} : \mathbf{Ord} \to p$ via

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(0) &= f(\uparrow \emptyset \setminus \emptyset) \\
\mathbf{G}(\alpha) &= f(\uparrow \mathrm{im} g \restriction \alpha \setminus \mathrm{im} g \restriction \alpha)
\end{aligned}$$

Per ogni α, $\mathrm{im} g \restriction \alpha$ è una catena, e quindi $\mathbf{G}$ è benm definita. Ovviamente è iniettiva, e questo è impossibile per il lemma di scoppio.

Sia adesso c una catena in p per cui $\uparrow c \setminus c = \emptyset$. Allora ogni $m \in \uparrow c$ è massimale in p.

(2)⇒(3). Sia x un insieme. Applichiamo il Lemma di Zorn all'insieme

$$p = \{(\alpha, f, y) : \alpha \in \mathbf{Ord}, y \subseteq x, f : \alpha \to y \text{ è una biiezione}\}$$

(3)⇒(4)⇒(1). Facile. □

4 Cardinali

Teorema 4.1. *(Hartogs) Siano S e T due insiemi non vuoti. Allora esiste un'iniezione $S \to T$ oppure un'iniezione $T \to S$.*

Dimostrazione. Applicare il Lemma di Zorn all'insieme delle biiezioni fra un sottoinsieme di S e un sottoinsieme di T, ordinato per inclusione. □

Teorema 4.2. *(Bernstein) Siano S e T due insiemi non vuoti. Se esistono iniezioni $f : S \to T$ e $g : T \to S$, allora esiste anche una biezione $S \to T$.*

Dimostrazione. Per $s \in S$, consideriamo la successione $s, g^{-1}(s), f^{-1}(g^{-1}(s)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(s))), \ldots$. Definiamo $h(s) = f(s)$ se tale successione si arresta su un elemento di S, $h(s) = g^{-1}(s)$ altrimenti (ovvero, la successione è infinita o si arresta su un elemento di T). Allora $h : S \to T$ è una biiezione. □

Per due insiemi S e T poniamo $|S| \leq |T|$ se esiste un'iniezione $S \to T$. Equivalentemente (assioma di scelta) se esiste una suriezione $T \to S$. Poniamo anche $|S| = |T|$ se esiste una biiezione fra S e T. I teoremi di Hartogs e di Bernstein ci garantiscono che $\leq$ è un ordine totale sulle classi di equivalenza rispetto a $|\ \ |$.

Teorema 4.3. *(Cantor) Per ogni insieme X si ha $|\mathcal{P}(X)| > |X|$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che non esiste un'applicazione suriettiva $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Infatti, sia $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Adesso non esiste $x \in X$ con $f(x) = A$. □

Intuitivamente, vogliamo che i cardinali siano le classi di equivalenza rispetto a $|\ \ |$. Questo non è molto rigoroso, perché $\{T : |S| = |T|\}$ non è un insieme, ma una classe propria; aggiustiamo le cose scegliendo rappresentanti per ogni classe di equivalenza. Infatti, usando il teorema di Zermelo, per ogni classe di equicardinalità $|S|$ scegliamo come rappresentante canonico il minimo $\alpha \in \mathbf{Ord}$ con $|\alpha| = |S|$. Poniamo così:

$$\mathbf{Card} = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \forall \beta \in \alpha\ |\beta| \neq |\alpha|\}$$

e scriviamo $|S| = \kappa$ per $\kappa \in \mathbf{Card}$ e $|S| = |\kappa|$. Ovviamente, ogni cardinale infinito è un ordinale limite.

Lemma 4.4. *Se x è un insieme di cardinali, allora $\bigcup x$ è un cardinale, esattamente il sup di x sia in* **Ord** *che in* **Card**.

Dimostrazione. Sia $\alpha = \bigcup x \in \mathbf{Ord}$. Supponiamo per assurdo che α sia biiettivo con qualche $\beta \in \alpha$. Sia $\kappa \in x$ con $\beta \subset \kappa \subseteq \alpha$. Allora per Bernstein $|\beta| = \kappa$, che è impossibile. □

Abbiamo una iniezione $\aleph : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Card}$, preservante l'ordine e suriettiva sulla classe dei cardinali infiniti, definita per recursione da:

$$\begin{aligned}
\aleph_0 &= \omega \\
\aleph_{\alpha+1} &= \min\{\beta \in \mathbf{Ord} : |\aleph_\alpha| < |\beta|\} \\
\aleph_\gamma &= \bigcup\{\aleph_\beta : \beta \in \gamma\} \text{ (se } \gamma \text{ è limite)}
\end{aligned}$$

Per il lemma di scoppio, **Card** è una classe propria.

Una funzione $\mathbf{F} : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ è *normale* se è un'immersione d'ordine continua sugli ordinali limite, ovvero, per ogni ordinale limite γ, è

$$\mathbf{F}(\gamma) = \bigcup \mathbf{F}[\gamma]$$

Si dimostra che ogni funzione normale ha punti fissi arbitrariamente grandi.

Definizione 4.5. Siano $\kappa, \lambda \in \mathbf{Card}$, A, B insiemi con $|A| = \kappa$ a $|B| = |\lambda|$. Definiamo:

$$\begin{aligned}
\kappa + \lambda &= |A \dot{\bigcup} B| \\
\kappa \cdot \lambda &= |A \times B| \\
\kappa^\lambda &= |A^B|
\end{aligned}$$

Lemma 4.6. *1. $+$ e $\cdot$ sono associative e commutative;*

2. $\cdot$ distribuisce su $+$;

3. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$;

4. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$;

5. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

Dimostrazione. Ordinaria amministrazione. □

Lemma 4.7. *Sia $n < \aleph_0 \leq \kappa$, e sia $\lambda \leq \kappa$. Allora:*

1. $\kappa \cdot n = \kappa$;

2. $\kappa + \lambda = \kappa$;

3. $\kappa \cdot \lambda = \kappa$;

4. $\lambda < 2^\lambda$;

5. $\lambda^\kappa = 2^\kappa$, se $2 \leq \lambda\kappa$.

Dimostrazione. (1) Basta dimostrare $\kappa \cdot 2 = \kappa$. Sia $|A| = \kappa$, e sia

$$P = \{(X, f) : X \subseteq A \ \ \& \ \ f : X \times 2 \to X \text{ biiettiva}\}$$

$P \neq \emptyset$ perché A ha un sottoinsieme numerabile. Applico Zorn, e trovo (X, f) massimale. Dico che $A \setminus X$ è finito. Se non lo fosse, trovo $Y \subseteq A \setminus X$ numerabile, ed estendo f a $X \cup Y$. Allora

$$|A| \leq |A \times 2| = |X \times 2| + |(A \setminus X) \times 2| = |X \times 2| = |X| \leq |A|$$

(2)

$$\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot 2 = \kappa$$

(3) Sia $|A| = \kappa$, e sia

$$P = \{(X, f) : X \subseteq A \ \ \& \ \ f : X^2 \to X \text{ biiettiva}\}$$

$P \neq \emptyset$ perché X ha un sottoinsieme numerabile. Applico Zorn, e trovo (X, f) massimale. Dico che $|X| = |A|$. Supponiamo di no. Allora $|X| < |A|$, e dunque $|A \setminus X| = \kappa$ per (2). Sia $Y \subseteq A \setminus X$ di cardinalità $|X|$. Allora, per (1) e (2),

$$X \times Y \bigcup Y \times X \bigcup Y \times Y$$

ha cardinalità $|Y|$, e posso estendere f a $X \cup Y$; ne segue che $|X| = |A|$, e $\kappa^2 = \kappa$. L'asserto segue allora come in (2).

(5) $2^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq (2^\lambda)^\kappa = 2^{\lambda \cdot \kappa} = 2^\kappa$. □

5 Cofinalità

Sia γ un ordinale limite (in particolare, un cardinale infinito). La *cofinalità* di γ è, per definizione, il minimo ordinale limite $\delta = \mathrm{cf}(\gamma)$ per cui esiste un'immersione $f : \delta \to \gamma$ con $\gamma = \bigcup f[\delta]$. Un cardinale infinito κ è *regolare* se $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, *singolare* altrimenti.

Lemma 5.1. *Sia γ un ordinale limite:*

1. $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}\gamma)) = \mathrm{cf}(\gamma)$;

*2. se $\gamma \notin$ **Card**, allora $\mathrm{cf}(\gamma) < \gamma$;*

3. $\mathrm{cf}(\gamma)$ è un cardinale regolare.

Dimostrazione. (1) è ovvio. Sia $\kappa = |\gamma| \in \gamma$. Allora posso usare una biiezione $f : \kappa \to \gamma$ per costruire una sequenza cofinale in γ indiciata da un ordinale $\subseteq \kappa$. Questo dimostra (2), mentre (3) segue da (1) e (2). □

Se γ è un ordinale limite, allora ovviamente $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma)$. $\aleph_0$ è regolare, $\aleph_\omega, \aleph_{\alpha+\omega}$ sono singolari, di cofinalità ω. Si dimostra che ogni $\aleph_{\alpha+1}$ è regolare.

Lemma 5.2. *(König) Per ogni cardinale infinito κ, si ha $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$.*

In particolare, $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$, e dunque $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, \ldots$. L' affermazione "$2^{\aleph_0} = \aleph_1$" è nota come *Ipotesi del continuo*; non è né dimostrabile né refutabile in ZFC. Infatti, Paul Cohen dimostrò nel 1963 che sia l'ipotesi del continuo che la sua negazione sono consistenti con ZFC. Di fatto, è consistente con ZFC $2^{\aleph_0} = \aleph_1, \aleph_2, \ldots$.

Definizione 5.3. Un cardinale κ è *debolmente inaccassibile* se è regolare e della forma $\aleph_\gamma$, con γ limite.

Lemma 5.4. *Sia κ un cardinale debolmente inaccessibile. Allora $\aleph_\kappa = \kappa$.*

Dimostrazione. $\kappa = \aleph_\gamma = \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) = \mathrm{cf}(\gamma) \leq \gamma \leq \aleph_\gamma = \kappa$. $\square$