Teoria delle categorie

Giovanni Panti

1 Definizioni ed esempi

Set, **Group**, **Ab**, R-**Mod**, **Mod**-R, **Ring**, **Top**, **Top**$_*$, **Toph** (spazi topologici modulo omotopia), **TopGroup**, preordini e posets, monoidi, **n** (la categoria discreta sull'insieme $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$). Categoria su un singolo oggetto = monoide. Categoria discreta = classe. Categorie piccole e localmente piccole. Sottocategorie e sottocategorie piene. La categoria $\mathbf{A}^\circ$ opposta di $\mathbf{A}$. Categorie concrete.

1.1 Funtori

Covarianti, controvarianti, pieni, fedeli, essenzialmente suriettivi, dimenticanti e di immersione.

1.2 (Co)prodotti

Se A, B, C sono anelli commutativi, con B, C A-algebra, allora $B \otimes_A C$ [AM69, p. 30] è il coprodotto di B e C nella categoria delle A-algebra commutative. Non è necessariamente il coprodotto di B e C nella categoria di tutte le A-algebre.

1.3 Oggetti iniziali e terminali

2 (Co)limiti

Sia $\mathbf{I}$ una categoria piccola, che pensiamo come una "categoria di indici". Un *diagramma* di tipo $\mathbf{I}$ è un funtore $D : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$. Un *cono verso la base* D è una coppia $(A, \{f_i\}_{i \in \mathbf{I}})$, con $A \in \mathbf{A}$ e $f_i : A \to Di$ tale che, per ogni $h : i \to j$ in $\mathbf{I}$, il triangolo

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ Di \arrow[rr, "Dh"'] & & Dj \end{tikzcd}$$

commuta. Una mappa fra $(A, \{f_i\})$ e $(B, \{g_i\})$ è una mappa $f : A \to B$ tale che ogni triangolo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & B \arrow[dl, "g_i"] \\ & Di & \end{tikzcd} \tag{1}$$

commuta. È facile vedere che con tali definizioni l'insieme dei coni verso D forma una categoria, che indichiamo con **Cone to** D. Un *limite* per D è un oggetto terminale in **Cone to** D, ovvero un cono $(B, \{g_i\})$ tale che, per ogni cono $(A, \{f_i\})$ esiste uno ed un solo morfismo $f : A \to B$ che fa commutare ogni triangolo (1).

Un *cono dalla base* D è una coppia $(\{g_i\}_{i \in \mathbf{I}}, A)$, con $A \in \mathbf{A}$ e $g_i : Di \to A$ tale che, per ogni $h : i \to j$ in $\mathbf{I}$, il triangolo

$$\begin{tikzcd} Di \arrow[rr, "Dh"] \arrow[dr, "g_i"'] & & Dj \arrow[dl, "g_j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commuta. Una mappa da $(\{g_i\}, A)$ a $(\{\nu_i\}, B)$ è una mappa $f : A \to B$ tale che ogni triangolo

$$\begin{tikzcd} & Di \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[dr, "\nu_i"] & \\ A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd} \tag{2}$$

commuta. Otteniamo così la categoria **Cone from** D dei coni da D. Un oggetto iniziale in **Cone from** D è detto *colimite* per D. Si tratta di un cono $(\{g_i\}, A)$ tale che, per ogni cono $(\{\nu_i\}, B)$, esiste una ed una sola mappa $f : A \to B$ che fa commutare (2).

> Formalmente, **Cone to** D è la categoria $\Delta \downarrow D$ dei Δ-oggetti sopra D, definita dall'oggetto $D \in \mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ e dal funtore
> $$\mathbf{A} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{A}^{\mathbf{I}}.$$
> Il funtore Δ associa ad $A \in \mathbf{A}$ il funtore costante $\Delta A : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$, che manda ogni $i \in \mathbf{I}$ in A, ed ogni freccia in $\mathbf{I}$ in id_A. Gli elementi di $\Delta \downarrow D$ sono le coppie (A, φ), con $A \in \mathbf{A}$ e $\varphi : \Delta A \to D$ trasformazione naturale.
>
> Analogamente, **Cone from** D è $D \downarrow \Delta$. Un limite per D è una freccia universale da Δ a D, ovvero un elemento terminale in $\Delta \downarrow D$, mentre un colimite per D è una freccia universale da D a Δ, ovvero un elemento iniziale in $D \downarrow \Delta$.

Esempio 1. (Co)equalizzatori.

Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è:

- *monic* se è cancellabile a sinistra, ovvero $fg = fh$ implica $g = h$;
- *epic* se è cancellabile a destra, ovvero $gf = hf$ implica $g = h$;
- *split monic* se è invertibile a sinistra, ovvero esiste $g : B \to A$ con $gf = \mathrm{id}_A$;
- *split epic* se è invertibile a destra, ovvero esiste $g : B \to A$ con $fg = \mathrm{id}_B$.

Lemma 2. *Ogni split monic ed ogni equalizzatore è monic. Ogni split epic ed ogni coequalizzatore è epic.*

In una categoria concreta, ogni mappa iniettiva (suriettiva) è monic (epic). In **Set**, in R-**Mod**, ed in altre categorie concrete, valgono anche le implicazioni inverse. L'inclusione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$, e quella di un sottoinsieme denso in uno spazio topologico, sono epic in **Ring** ed in **Top**, rispettivamente. Nella categoria dei gruppi abeliani divisibili $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è monic (esercizio).

Esempio 3. Pullbacks e pushouts.

Lemma 4. *$f : A \to B$ è monic sse*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

è un pullback. È epic sse

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

è un pushout.

Definizione 5. Sia $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtore. Diciamo che F:

- *conserva* i prodotti se, ogni volta che

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd} \tag{3}$$

  è un prodotto in $\mathbf{A}$,

$$\begin{tikzcd} & FC \arrow[dl, "Ff_1"'] \arrow[dr, "Ff_2"] & \\ FA & & FB \end{tikzcd} \tag{4}$$

  è un prodotto in $\mathbf{B}$;

- *riflette* i prodotti se, ogni volta che (4) è un prodotto in $\mathbf{B}$, (3) è un prodotto in $\mathbf{A}$;

- *crea* i prodotti se, ogni volta che

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "g_1"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\ FA & & FB \end{tikzcd}$$

  è un prodotto in $\mathbf{B}$, esiste uno ed un solo prodotto (3) in $\mathbf{A}$ con $P = FC$, $g_1 = Ff_1$, e $g_2 = Ff_2$.

Questa definizione si estende in modo ovvio ai coprodotti, (co)limiti, isomorfismi ...

Esempio 6. Il funtore dimenticante $S : \mathbf{Group} \to \mathbf{Set}$ crea i prodotti, ma non i coprodotti. Un funtore pieno e fedele $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ crea gli isomorfismi, e dunque è iniettivo sugli oggetti, a meno di isomorfismi; in particolare, $\mathbf{A}$ e $F[\mathbf{A}]$ sono equivalenti (ma non isomorfe, in generale).

2.1 Limiti diretti ed inversi di moduli. Gruppi di Prüfer ed interi p-adici

Sia $\mathbf{I}$ un poset direttato, visto come categoria (*direttato* significa che, per ogni i, j, esiste k con $i, j \leq k$). Un diagramma di A-moduli di tipo $\mathbf{I}$ è allora una famiglia di A-moduli $\{M_i\}$ indiciata da $\mathbf{I}$, collegati da una famiglia di omomorfismi $f_{ij} : M_i \to M_j$, per ogni $i \leq j$, soggetti alla condizioni $f_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ e $f_{jk}f_{ij} = f_{ik}$. Il colimite categoriale del diagramma, detto anche *limite diretto* o *limite induttivo* dagli algebristi, lo si ottiene facendo la somma diretta N degli M_i (ovvero il coprodotto categoriale, in cui le mappe f_{ij} vengono trascurate), e poi quozientando N per il sottomodulo Q generato dall'insieme

$$\{m_i - f_{ij}(m_i) : m_i \in M_i\}.$$

È facile vedere che tale quoziente N/Q, insieme con le mappe $m_i \mapsto m_i/Q$, soddisfa l'opportuna proprietà universale. Indichiamo il limite diretto degli M_i con $\varinjlim M_i$.

Esempio 7. Sia p un primo. Consideriamo il diagramma

$$Z_p \to Z_{p^2} \to Z_{p^3} \to \cdots,$$

in cui le mappe sono date da $1 \mapsto p$. Il limite diretto è identificabile con il sottogruppo di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ i cui elementi sono le classi di equivalenza dei razionali aventi al denominatore una potenza di p o, alternativamente, con il gruppo moltiplicativo di tutte le radici p^i-esime dell'unità, per $i = 1, 2, \ldots$. Esso è detto *gruppo di Prüfer*, ed è indicato con Z_{p^∞}.

Il limite categoriale di un diagramma di tipo $\mathbf{I}$, detto anche *limite inverso* o *limite proiettivo* dagli algebristi, lo si ottiene facendo il prodotto diretto N degli M_i (ovvero il prodotto categoriale, in cui le mappe f_{ij} vengono trascurate), e prendendo il sottogruppo Q di N i cui elementi sono tutti e soli gli $(m_i)_{i \in \mathbf{I}}$ tali che, per ogni $i \leq j$, $f_{ij}(m_i) = m_j$. Tale Q, insieme con le mappe π_i di proiezione sull'i-esimo componente, soddisfa l'opportuna proprietà universale. Indichiamo il limite inverso degli M_i con $\varprojlim M_i$.

Esempio 8. Sia p il solito primo. Consideriamo il diagramma

$$Z_p \leftarrow Z_{p^2} \leftarrow Z_{p^3} \leftarrow \cdots, \tag{5}$$

in cui la mappa : $Z_{p^i} \leftarrow Z_{p^{i+1}}$ è la riduzione modulo p^i. Scrivendo i numeri in base p, è facile vedere che il limite proiettivo ha come elementi tutte le successioni infinite

$$a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots$$

con $a_i \in \{0, \ldots, p-1\}$, ed usuale somma con riporto (da sinistra a destra). Si tratta dunque di un gruppo evente la cardinalità del continuo, il *gruppo degli interi p-adici* $\mathbb{Z}_p$.

Le costruzioni precedenti funzionano per ogni classe equazionale di algebre, senza problemi per il limite proiettivo, con qualche attenzione extra per il limite diretto. In particolare, vedendo il diagramma (5) in **Ring**, otteniamo il dominio $\mathbb{Z}_p$ degli interi p-adici, il cui campo dei quozienti è il campo $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}[1/p] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ dei numeri p-adici.

Teorema 9. *Sia κ un cardinale infinito. Una categoria ha limiti di cardinalità $< \kappa$ sse ha prodotti di cardinalità $< \kappa$ ed equalizzatori. Una tale categoria ha automaticamente oggetto terminale (il limite del diagramma vuoto, o il prodotto dell'insieme vuoto di oggetti).*

Dimostrazione. Una direzione è ovvia. Sia $\mathbf{I}$ una categoria con $< \kappa$ oggetti e $< \kappa$ frecce, e sia $D : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ un diagramma. Sia

$$(A, \pi_i) = \prod_{i \in \mathbf{I}} Di$$
$$(B, \varphi_h) = \prod_{h \text{ freccia in } \mathbf{I}} D(\operatorname{cod} h)$$

Per $h : i \to j$ in $\mathbf{I}$ ho allora

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ Di & & Dj \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\varphi_{\mathrm{id}_i}"'] \arrow[d, "\varphi_h"] \arrow[dr, "\varphi_{\mathrm{id}_j}"] & \\ Di & Dj & Dj \end{tikzcd}$$

Per ogni h come sopra ci sono due possibili mappe da A a $D(\operatorname{cod} h) = Dj$:

- $\pi_j : A \to Dj$;
- $(Dh)\pi_i : A \to Di \to Dj$.

Per l'universalità di B ottengo due mappe $f, g : A \to B$ definite da:

- $\varphi_h f = \pi_j$;
- $\varphi_h g = (Dh)\pi_i$.

Sia $e : E \to A$ l'equalizzatore di f e g e, per ogni $i \in \mathbf{I}$, sia $\psi_i = \pi_i e$. Dico che (E, ψ_i) è il limite di D. Infatti, per ogni $h : i \to j$ il triangolo

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\ Di \arrow[rr, "Dh"'] & & Dj \end{tikzcd}$$

commuta: $(Dh)\psi_i = (Dh)\pi_i e = \varphi_h g e = \varphi_h f e = \pi_j e = \psi_j$. Completare la dimostrazione per esercizio, mostrando che, se (C, ν_i) fa commutare ogni triangolo

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\nu_i"'] \arrow[dr, "\nu_j"] & \\ Di \arrow[rr, "Dh"'] & & Dj \end{tikzcd}$$

allora esiste uno ed un solo $k : C \to E$ con $\nu_i = \psi_i k$. □

2.2 Categorie comma

Siano dati funtori

$$\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{C} \xleftarrow{G} \mathbf{B}.$$

La *categoria comma* $F \downarrow G$ ha come oggetti le triple (A, f, B) con $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}, f \in \mathbf{C}[FA, GB]$. Una freccia da (A, f, B) a (C, g, D) è una coppia di frecce $h : A \to C$ e $k : B \to D$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Fh"] \arrow[d, "f"'] & FC \arrow[d, "g"] \\ GB \arrow[r, "Gk"'] & GD \end{tikzcd}$$

commuta. Si considera spesso il caso $\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Allora F è univocamente determinato dalla scelta di un oggetto $A \in \mathbf{C}$ e scriviamo

$$\mathbf{1} \xrightarrow{A} \mathbf{C} \xleftarrow{G} \mathbf{B},$$

con abuso di linguaggio. La corrispondente categoria comma, i cui elementi sono le coppie (f, B) con $f : A \to GB$, è detta *categoria dei G-oggetti sotto A*, ed è indicata con $A \downarrow G$. Se esiste un oggetto iniziale in $A \downarrow G$, esso è detto *freccia universale da A a G*.

Analogamente, si considera $\mathbf{B} = \mathbf{1}$, e G è determinato dalla scelta di $B \in \mathbf{C}$. Otteniamo $F \downarrow B$, la *categoria degli F-oggetti sopra B*, i cui elementi sono le coppie (A, f), con $f : FA \to B$. Un oggetto terminale in $F \downarrow B$ è detto *freccia universale da F a B*.

Esempio 10. Consideriamo $\{*\} \in \mathbf{Set}$ e $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. Allora $\{*\} \downarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$ è la categoria degli insiemi puntati. Sostituendo $\mathbf{Set}$ con $\mathbf{Top}$, otteniamo $\mathbf{Top}_*$, la categoria degli spazi topologici puntati.

3 Trasformazioni naturali

Definizioni.

Esempio 11. Abbiamo il funtore controvariante $H^{\mathbb{R}} = {}^* : \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}$, e quello covariante ${}^{**} : \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}$. Notiamo che se $f : U \to V$, allora $f^* : U^* \leftarrow V^*$ è definito da $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$. Dico che $U \mapsto U^{**}$ è naturale in U. Significa che ho una trasformazione naturale

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Id}_{\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod}}"] \arrow[r, bend right, "**"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathbb{R}\text{-}\mathbf{Mod} \end{tikzcd}$$

definita da $\alpha_U(u) = \langle u, - \rangle$, dove $\langle -, - \rangle : U \times U^* \to \mathbb{R}$ è l'accoppiamento di valutazione. Si tratta di verificare che il diagramma

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d, "f"'] & U \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "f"'] & U^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ V & V \arrow[r, "\alpha_V"'] & V^{**} \end{tikzcd}$$

commuta (esercizio). Se ci restringiamo alla sottocategoria piena di $\mathbb{R}$-**Mod** i cui elementi sono gli spazi vettoriali di dimensione finita, allora ** è un isomorfismo naturale.

3.1 La categorie $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$. Prodotti di categorie, bifuntori.

Consideriamo il bifuntore Hom

$$\mathbf{A}^\circ \times \mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{A}[-,-]} \mathbf{Set}.$$

Abbiamo il diagramma commutativo

$$
\begin{tikzcd}
A & C \arrow[dd, "g"] & & \mathbf{A}[A,C] \arrow[dl, "{\mathbf{A}[\mathrm{id}_A, g] = g\circ -}"'] \arrow[dr, "{\mathbf{A}[f, \mathrm{id}_C] = -\circ f}"] & \\
& & \mathbf{A}[A,D] \arrow[dr, "{\mathbf{A}[f, \mathrm{id}_D] = -\circ f}"'] & & \mathbf{A}[B,C] \arrow[dl, "{\mathbf{A}[\mathrm{id}_B, g] = g\circ -}"] \\
B \arrow[uu, "f"] & D & & \mathbf{A}[B,D] &
\end{tikzcd}
\tag{6}
$$

Adesso, consideriamo la prima variabile come un parametro. Definiamo cioè:

- $H_A =$ il funtore definito da $\mathbf{A}[A, -]$ sugli oggetti e da $\mathbf{A}[\mathrm{id}_A, -]$ sulle frecce;
- $H_B =$ il funtore definito da $\mathbf{A}[B, -]$ sugli oggetti e da $\mathbf{A}[\mathrm{id}_B, -]$ sulle frecce;
- $H_f =$ la famiglia di frecce indiciata dagli oggetti $C \in \mathbf{A}$ e definita da $(H_f)_C = \mathbf{A}[f, \mathrm{id}_C] = - \circ f$.

Allora il diagramma (6) diviene

$$
\begin{tikzcd}
H_A C \arrow[r, "(H_f)_C = -\circ f"] \arrow[d, "g\circ - = H_A g"'] & H_B C \arrow[d, "H_B g = g\circ -"] \\
H_A D \arrow[r, "(H_f)_D = -\circ f"'] & H_B D
\end{tikzcd}
$$

da cui segue che

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, bend left, "H_A"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H_B"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, "H_f"]
\end{tikzcd}
$$

è una trasformazione naturale. Quindi

$$\mathbf{A}^\circ \xrightarrow{H_-} \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$$

è un funtore controvariante. Dualmente, considerando la seconda variabile come parametro, abbiamo:

- $H^C =$ il funtore controvariante definito da $\mathbf{A}[-, C]$ sugli oggetti e da $\mathbf{A}[-, \mathrm{id}_C]$ sulle frecce;
- analogamente per H^D;
- $H^g =$ la famiglia di frecce definita da $(H^g)_A = \mathbf{A}[\mathrm{id}_A, g] = g \circ -$.

Allora (6) diviene

$$
\begin{tikzcd}
H^C A \arrow[r, "(H^g)_A = g\circ -"] \arrow[d, "-\circ f = H^C f"'] & H^D A \arrow[d, "H^D f = -\circ f"] \\
H^C B \arrow[r, "(H^g)_B = g\circ -"'] & H^D B
\end{tikzcd}
$$

da cui segue che

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^\circ \arrow[r, bend left, "H^C"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H^D"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, "H^g"]
\end{tikzcd}
$$

è una trasformazione naturale, e

$$\mathbf{A} \xrightarrow{H^-} \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^\circ}$$

è un funtore covariante.

Il successivo Corollario 13 (conseguenza del Lemma di Yoneda) afferma che H^- è pieno e fedele; poiché ovviamente H^- è iniettivo sugli oggetti, ne segue che ogni categoria è una sottocategoria piena di una categoria di funtori (controvarianti).

3.2 Funtori rappresentabili e lemma di Yoneda

Teorema 12. *Sia $F : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ covariante, e sia $A \in \mathbf{A}$. Allora:*

(i) (Lemma di Yoneda) le trasformazioni naturali

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left=50, "H_A"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "F"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

sono in biiezione con gli elementi $a \in FA$;

(ii) la biiezione in (i) ǹaturale in A e in F;

(iii) α è un isomorfismo sse (a, A) è iniziale nella categoria $\{*\} \downarrow F$ degli F-oggetti puntati: in tal caso diciamo che (a, A) è una rappresentazione *di F;*

(iv) c'è una biiezione fra le rappresentazioni di F e gli oggetti iniziali in $\{*\} \downarrow F$.

Dimostrazione. (i) Definiremo funzioni

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}[H_A, F] \arrow[r, shift left, "y"] & FA \arrow[l, shift left, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

inverse l'una dell'altra. Pongo $y(\alpha) = \alpha_A(\mathrm{id}_A)$. Viceversa, per ogni $B \in \mathbf{A}$, definisco $\lambda(a)_B : H_A B \to FB$ tramite $[\lambda(a)_B](f) = (Ff)(a)$. Dobbiamo dimostrare che $\lambda(a)$ è una trasformazione naturale (esercizio), che $y(\lambda(a)) = a$, e che $\lambda(y(\alpha)) = \alpha$. Abbiamo

$$\begin{aligned} y(\lambda(a)) &= (\lambda(a))_A(\mathrm{id}_A) \\ &= (F\,\mathrm{id}_A)(a) \\ &= \mathrm{id}_{FA}(a) \\ &= a, \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} (\lambda(y(\alpha)))_B(f) &= (Ff)(y(\alpha)) \\ &= (Ff)(\alpha_A(\mathrm{id}_A)) \\ &= \alpha_B((H_A f)(\mathrm{id}_A)) \qquad \text{(perchè } \alpha \text{ è naturale)} \\ &= \alpha_B(f). \end{aligned}$$

(ii) La naturalità di $\alpha \mapsto a$ significa che

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \times \mathbf{Set}^{\mathbf{A}} \arrow[r, bend left=50, "{\mathbf{Set}^{\mathbf{A}}[H_-, -]}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{Eval}"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "y"] \end{tikzcd}$$

è un isomorfismo naturale, dove Eval è il funtore di valutazione, definito da

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "\varphi"'] & & \mathrm{Eval}(A, F) = FA \arrow[d, "{\mathrm{Eval}(f,\varphi)=(Gf)\varphi_A=\varphi_B(Ff)}"] \\ B & G \arrow[rr, phantom, "\xrightarrow{\mathrm{Eval}}"] & & \mathrm{Eval}(B, G) = GB \end{tikzcd}$$

Si tratta dunque di dimostrare che, per f e φ come sopra, il diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}[H_A, F] \arrow[r, "y_{A,F}"] \arrow[d, "\varphi \circ - \circ H_f"'] & FA \arrow[d, "(Gf)\varphi_A = \varphi_B(Ff)"] \\ \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}[H_B, G] \arrow[r, "y_{B,G}"'] & GB \end{tikzcd}$$

commuta (esercizio).
(iii) α è un isomorfismo sse per ogni $B \in \mathbf{A}$, $\alpha_B = (\lambda(a))_B = (F-)(a) : H_A B \to FB$ è una biiezione sse per ogni $B \in \mathbf{A}$ ed ogni $b \in FB$ esiste uno ed un solo $f \in H_A B$ con $(Ff)(a) = b$ sse (a, A) è iniziale in $\{*\} \downarrow F$.
(iv) da (i) e (iii). $\square$

Corollario 13. *Se un funtore è rappresentabile, lo è da un unico oggetto (a meno di isomorfismi). Il funtore Hom controvariante*

$$\mathbf{A}^\circ \xrightarrow{H_-} \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}$$

è pieno e fedele. Le trasformazioni naturali fra due funtori isomorfi, rispettivamente, a H_A e a H_B sono in biiezione con le frecce da B a A.

Dimostrazione. Prendiamo $F = H_B$ nel Teorema 12. Poiché gli oggetti iniziali sono unici a meno di isomorfismo, ogni A che rappresenta H_B deve essere isomorfo a B. Per il Lemma di Yoneda,

$$\lambda : H_B A \to \mathbf{Set}^{\mathbf{A}}[H_A, H_B]$$

è una biiezione. Affermo che λ coincide con H_- su $H_B A$: questo concluderà la dimostrazione. Sia $g : B \to A$, sia $C \in \mathbf{A}$, e sia $h \in H_A C$. Allora $(\lambda(g))_C(h) = (H_B h)(g) = hg = H_g h$. $\square$

Il Teorema 12 e il Corollario 13 si dualizzano in modo ovvio: le rappresentazioni $\alpha : H^A \to F$ del funtore controvariante $F : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ sono in biiezione con gli oggetti terminali della categoria degli F-oggetti puntati. Un tale oggetto terminale è una coppia (a, A), con $a \in FA$, tale che, per ogni (b, B), esiste una ed una sola $f : B \to A$ con $(Ff)(a) = b$. Inoltre, dualizzando il Corollario 13, otteniamo che

$$\mathbf{A} \xrightarrow{H^-} \mathbf{Set}^{\mathbf{A}^\circ}$$

è un'immersione di $\mathbf{A}$ in una sottocategoria piena di $\mathbf{Set}^{\mathbf{A}^\circ}$. Dunque, ogni categoria è una categoria di funtori.

Esempio 14. Sia $S : \mathbf{Group} \to \mathbf{Set}$ il funtore dimenticante. Per ogni $G \in \mathbf{Group}$ c'è una biiezione naturale

$$\begin{aligned} \alpha_G : & H_{\mathbb{Z}} G \to SG \\ & f \mapsto f(1). \end{aligned}$$

Questo significa che $(1, \mathbb{Z})$ è iniziale in $\{*\} \downarrow S$, ovvero che

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Group} \arrow[r, bend left, "H_{\mathbb{Z}}"] \arrow[r, bend right, "S"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

è una rappresentazione di S. Notare che pure $(-1, \mathbb{Z})$ rappresenta S, e d'altronde $(1, \mathbb{Z})$ e $(-1, \mathbb{Z})$ sono isomorfi in $\{*\} \downarrow S$.

Esempio 15. Sia $\mathbf{C}$ la categoria delle $\mathbb{C}$-algebre finitamente generate: è una sottocategoria piena di $\mathbb{C} \downarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{CommRing}}$. Per una delle forma del Nullstellensatz, ogni ideale massimale di $A \in \mathbf{C}$ è il kernel di un omomorfismo : $A \to \mathbb{C}$. Questo implica che:

- la controimmagine di un massimale sotto una mappa in $\mathbf{C}$ è un massimale;
- $\mathrm{MaxSpec} : \mathbf{C} \to \mathbf{Top}$ è un funtore (controvariante);
- per ogni $A \in \mathbf{C}$ ed ogni $\mathfrak{m} \in \mathrm{MaxSpec}\, A$, esiste una ed una sola freccia $f : A \to \mathbb{C}$ in $\mathbf{C}$ tale che $\mathfrak{m} = (\mathrm{MaxSpec}\, f)((0)) = \ker f$. Ne segue che $((0), \mathbb{C})$ è terminale in $\{*\} \downarrow \mathrm{MaxSpec}$, ovvero che MaxSpec è rappresentabile da $((0), \mathbb{C})$, ovvero che la trasformazione naturale

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, bend left, "H^{\mathbb{C}}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{MaxSpec}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

definita da $\alpha_A(f) = \ker f$ è un isomorfismo.

Notare che tutto ciò è falso nel caso di algebre su un campo non algebricamente chiuso. Per esempio, il massimale $(x^2 - 2)$ di $\mathbb{Q}[x]$ non è il kernel di alcun omomorfismo verso $\mathbb{Q}$.

Esempio 16. Fissiamo A-moduli M, N. Ho allora un funtore covariante

$$A\text{-}\mathbf{Mod} \xrightarrow{\mathrm{Bilin}(M \times N, -)} \mathbf{Set},$$

che associa ad ogni modulo P l'insieme delle mappe bilineari : $M \times N \to P$ (vedi [AM69, Cap. 2]). La proprietà universale del prodotto tensoriale dice esattamente che $\mathrm{Bilin}(M \times N, -)$ è rappresentabile da $H_{M \otimes N} = \mathrm{Hom}(M \otimes N, -)$.

Esercizio 17. Sia $M = A/\mathfrak{a}$, $N = A/\mathfrak{b}$. Dimostrare che $M \otimes_A N \simeq A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.

3.3 Aggiunzioni

Siano dati funtori

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{B}. \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Abbiamo allora bifuntori

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^\circ \times \mathbf{B} \arrow[r, shift left, "{\mathbf{B}[F-,-]}"] \arrow[r, shift right, "{\mathbf{A}[-,G-]}"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Definizione 18. Siano F e G come sopra. Se esiste un isomorfismo naturale

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}^\circ \times \mathbf{B} \arrow[r, shift left=2, "{\mathbf{B}[F-,-]}"{name=U}] \arrow[r, shift right=2, "{\mathbf{A}[-,G-]}"'{name=D}] & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

diciamo che F è *aggiunto sinistro* di G, e G è *aggiunto destro* di F, e scriviamo $F \dashv G$.

La definizione precedente può essere riformulata come segue: per ogni $A \in \mathbf{A}$ e $B \in \mathbf{B}$, esiste una biiezione $\alpha_{A,B} : \mathbf{B}[FA, B] \to \mathbf{A}[A, GB]$ tale che, se

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\downarrow \alpha_{A,B}"] & B \\ A \arrow[r, "f"'] & GB \end{tikzcd}$$

allora

$$\begin{tikzcd} FA' \arrow[r, "Fh"] & FA \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\downarrow \alpha_{A',B'}"] & B \arrow[r, "k"] & B' \\ A' \arrow[r, "h"'] & A \arrow[r, "f"'] & GB \arrow[r, "Gk"'] & GB' \end{tikzcd}$$

In genere, si scrive $f = \widehat{g}$ per $f = \alpha_{A,B}(g)$, e $g = \widehat{f}$ per $g = \alpha^{-1}_{A,B}(f)$, identificando nella notazione $\alpha_{A,B}$ con $\alpha^{-1}_{A,B}$, e sottoindendendo il riferimento ad A, B. Per ogni $A \in \mathbf{A}$ e $B \in \mathbf{B}$, poniamo $\eta_A = \widehat{\mathrm{id}_{FA}} : A \to GFA$ e $\varepsilon_B = \widehat{\mathrm{id}_{GB}} : FGB \to B$.

Esempio 19. Free $\dashv$ Forg fra **Group** e **Set**; più in generale fra una qualsiasi classe equazionale e **Set**.

Esercizio 20. Sia $F \dashv G$. Allora:

(i) sia $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \to GF$ che $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$ sono trasformazioni naturali (dette rispettivamente l'*unità* e la *counità* dell'aggiunzione);

(ii) sia $f \in \mathbf{A}[A, GB]$ e $g \in \mathbf{B}[FA, B]$. Allora $g = \widehat{f}$ sse i due triangoli

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & GFA \arrow[d, "Gg"] \\ & GB \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "g"] & \\ FGB \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & B \end{tikzcd} \tag{7}$$

commutano sse almeno uno dei due commuta;

(iii) per ogni $A \in \mathbf{A}$, η_A è iniziale in $A \downarrow G$;

(iv) per ogni $B \in \mathbf{B}$, ε_B è terminale in $F \downarrow B$.

Teorema 21. *Siano dati funtori*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{B}. \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

T.f.a.e.:

(i) $F \dashv G$;

(ii) esiste una trasformazione naturale $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \to GF$ tale che, per ogni $A \in \mathbf{A}$, $\eta_A : A \to GFA$ è iniziale in $A \downarrow G$;

(iii) esiste una trasformazione naturale $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$ tale che, per ogni $B \in \mathbf{B}$, $\varepsilon_B : FGB \to B$ è terminale in $F \downarrow B$;

(iv) esistono trasformazioni naturali $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \to GF$ ed $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$ tali che, per ogni $A \in \mathbf{A}$ e ogni $B \in \mathbf{B}$, i due triangoli

$$\begin{tikzcd} GB \arrow[r, "\eta_{GB}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GB}"'] & GFGB \arrow[d, "G\varepsilon_B"] \\ & GB \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[d, "F\eta_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{FA}"] & \\ FGFA \arrow[r, "\varepsilon_{FA}"'] & FA \end{tikzcd}$$

commutano.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) e (iii) Già visto.
(i) $\Rightarrow$ (iv) Applicando l'Esercizio 20(ii).
(ii) $\Rightarrow$ (i) Per ogni $A \in \mathbf{A}$ e $B \in \mathbf{B}$, definiamo

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B} : &\mathbf{B}[FA, B] \to \mathbf{A}[A, GB] \\ &g \mapsto (Gg)\eta_A. \end{aligned}$$

Allora $\alpha_{A,B}$ è una biiezione perché (η_A, FA) è iniziale in $A \downarrow G$, e α è naturale perché il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \\ A' \arrow[u, "h"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "k"'] \\ B' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{B}[FA, B] \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] \arrow[d, "{\mathbf{B}[Fh,k]}"'] & \mathbf{A}[A, GB] \arrow[d, "{\mathbf{A}[h,Gk]}"] \\ \mathbf{B}[FA', B'] \arrow[r, "\alpha_{A',B'}"'] & \mathbf{A}[A', GB'] \end{tikzcd}$$

commuta (esercizio).
(iii) $\Rightarrow$ (i) Duale a (iv) $\Rightarrow$ (i). Poniamo

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}_{A,B} : \mathbf{A}[A, GB] &\to \mathbf{B}[FA, B] \\ f &\mapsto \varepsilon_B(Ff). \end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Dobbiamo dimostrare che (η_A, FA) è iniziale in $A \downarrow G$. Sia $f : A \to GB$. Pongo $g = \varepsilon_B(Ff) : FA \to B$. Allora:

$$\begin{aligned}
(Gg)\eta_A &= (G\varepsilon_B)(GFf)\eta_A \\
&= (G\varepsilon_B)\eta_{GB} f \qquad \text{(poiché } \eta \text{ è naturale)} \\
&= \mathrm{id}_{GB} f \\
&= f.
\end{aligned}$$

Inoltre g è unico: infatti, abbiamo

$$\begin{aligned}
(Gg)\eta_A = f &\Rightarrow (FGg)(F\eta_A) = Ff \\
&\Rightarrow \varepsilon_B(FGg)(F\eta_A) = \varepsilon_B(Ff) \\
&\Rightarrow g\varepsilon_{FA}(F\eta_A) = \varepsilon_B(Ff) \qquad \text{(poiché } \varepsilon \text{ è naturale)} \\
&\Rightarrow g = g\,\mathrm{id}_{FA} = \varepsilon(Ff).
\end{aligned}$$

□

Nel linguaggio delle composizioni verticali fra trasformazioni naturali e delle composizioni orizzontali fra funtori e trasformazioni naturali, (iv) si esprime dicendo che $(\varepsilon F) \circ (F\eta) = \mathrm{id}_F$ e che $(G\varepsilon) \circ (\eta G) = \mathrm{id}_G$. Queste ultime si dicono *identità triangolari.*

Teorema 22. *Sia $G : \mathbf{A} \leftarrow \mathbf{B}$. T.f.a.e.:*

(i) G ha un aggiunto sinistro;

(ii) per ogni $A \in \mathbf{A}$, il funtore covariante

$$\mathbf{B} \xrightarrow{\mathbf{A}[A,G-]=H_A G} \mathbf{Set}$$

è rappresentabile;

(iii) per ogni $A \in \mathbf{A}$, la categoria $A \downarrow G$ ha oggetto iniziale.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii) Fissiamo $A \in \mathbf{A}$. Allora $\mathbf{A}[A, G-]$ è rappresentabile da H_{FA} per definizione di aggiunzione.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sia $A \in \mathbf{A}$, e sia (b, B) l'oggetto rappresentante $\mathbf{A}[A, G-]$. Allora $b \in \mathbf{A}[A, GB]$ e (b, B) è iniziale in $1 \downarrow \mathbf{A}[A, G-] = A \downarrow G$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Per ogni $A \in \mathbf{A}$, scegliamo un oggetto iniziale (η_A, FA) in $A \downarrow G$. Vogliamo estendere F ad un funtore : $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Sia $f : A \to A'$ una freccia in $\mathbf{A}$. Allora ho

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & GFA \\
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & GFA'
\end{tikzcd} \tag{8}$$

ed esiste una ed una sola freccia $g \in \mathbf{B}[FA, FA']$ tale che $Gg : GFA \to GFA'$ completa il diagramma (8) in modo commutativo. Definisco $Ff = g$; è facile verificare (esercizio) che F conserva le frecce identiche e distribuisce sulle composizioni di frecce. Dunque F è un funtore e $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{A}} \to GF$ una trasformazione naturale. Applicando il Teorema 21(ii) otteniamo $F \dashv G$. □

Per il Corollario 13, un oggetto rappresentante è unico a meno di isomorfismi. Ne segue che se un funtore ha un aggiunto, allora tale aggiunto è unico a meno di isomorfismi.

3.4 Prodotto tensoriale e funtore Hom

C'è un bifuntore

$$\mathbf{Mod} \times \mathbf{Mod} \xrightarrow{-\otimes-} \mathbf{Mod}$$

(cfr. [AM69, dopo Exercise 2.15]). Fissando un modulo N, otteniamo un funtore

$$\mathbf{Mod} \xrightarrow{-\otimes N} \mathbf{Mod}.$$

Teorema 23. *I due funtori*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod} \arrow[r, shift left, "-\otimes N"] & \mathbf{Mod} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}(N,-)"] \end{tikzcd}$$

sono aggiunti, con $-\otimes N \dashv \mathrm{Hom}(N,-)$.

Dimostrazione. Dico che i due funtori

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Mod} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Bilin}(M\times N,-)"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,-))"'] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

sono isomorfi. Pongo infatti

$$\gamma = \gamma_P : \mathrm{Bilin}(M\times N,P) \to \mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,P))$$
$$\big[(\gamma(b))(m)\big](n) = b(m,n).$$

Si tratta di verificare che:

1. per ogni b ed m, $(\gamma(b))(m)$ è un omomorfismo : $N \to P$;
2. per ogni b, $\gamma(b)$ è un omomorfismo : $M \to \mathrm{Hom}(N,P)$;
3. il diagramma

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Bilin}(M\times N,P) \arrow[r, "\gamma_P"] \arrow[d, "\mathrm{Bilin}(M\times N,g)"'] & \mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,P)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,g))"] \\ Q & \mathrm{Bilin}(M\times N,Q) \arrow[r, "\gamma_Q"'] & \mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,Q)) \end{tikzcd}$$

   commuta;
4. sia $\beta : \mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,P)) \to \mathrm{Bilin}(M\times N,P)$ definito da $(\beta(h))(m,n) = (h(m))(n)$. Allora $\beta(h) : M\times N \to P$ è bilineare e sia $\beta\gamma$ che $\gamma\beta$ sono identità.

Per transitività, $\mathrm{Hom}(M\otimes N,-)$ e $\mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,-))$ sono isomorfi. Dunque, per ogni P, c'è una biiezione

$$\begin{tikzcd} M\otimes N \arrow[r, "f"] & P \arrow[d, leftrightarrow] \\ M \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Hom}(N,P) \end{tikzcd}$$

data da

$$g = \gamma_P(f\circ\otimes) : m \mapsto (f\circ\otimes)(m,-) = f(m\otimes -).$$

Tale biiezione è naturale in P per quanto visto sopra, e si dimostra (esercizio) che è naturale anche in M. Ne segue l'enunciato. $\square$

Teorema 24. *Siano $F \dashv G$ come nella Definizione 18. Allora F conserva i colimiti (in particolare i coprodotti e gli epic), e G conserva i limiti (in particolare i prodotti e i monic).*

Dimostrazione. Sia $D : \mathbf{I} \to \mathbf{A}$ un diagramma, e sia $(\{f_i\}, A)$ un colimite per D. Dobbiamo dimostrare che $(\{Ff_i\}, FA)$ è un colimite per FD. Ovviamente $(\{Ff_i\}, FA)$ è un cono dalla base FD al vertice FA. Sia

$$\begin{tikzcd} FDi \arrow[rr, "FDh"] \arrow[dr, "g_i"'] & & FDj \arrow[dl, "g_j"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

un cono dalla base FD. Applicando la biiezione di aggiunzione $\widehat{\ }$ ottengo un cono

$$\begin{tikzcd} Di \arrow[rr, "Dh"] \arrow[dr, "\widehat{g_i}"'] & & Dj \arrow[dl, "\widehat{g_j}"] \\ & GB & \end{tikzcd}$$

Poiché $(\{f_i\}, A)$ è un colimite per D, esiste una ed una sola $t : A \to GB$ che fa commutare ogni triangolo

$$\begin{tikzcd} & Di \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "\widehat{g_i}"] & \\ A \arrow[rr, "t"'] & & GB \end{tikzcd}$$

Applicando nuovamente l'aggiunzione, trovo che esiste una ed una sola freccia, ovvero $\widehat{t}$, che fa commutare ogni triangolo

$$\begin{tikzcd} & FDi \arrow[dl, "Ff_i"'] \arrow[dr, "g_i"] & \\ FA \arrow[rr, "\widehat{t}"'] & & B \end{tikzcd}$$

Dualmente, G conserva i limiti. □

Esempio 25.
1. L'algebra libera sull'insieme di generatori $X \cup Y$ (unione disgiunta) è il coprodotto dell'algebra libera su X con l'algebra libera su Y;
2. l'insieme sottostante ad un prodotto di algebre è il prodotto degli insiemi sottostanti alle algebre;
3. $(M \oplus Q) \otimes N \simeq (M \otimes N) \oplus (Q \otimes N)$;
4. $\mathrm{Hom}(N, P \oplus Q) \simeq \mathrm{Hom}(N, P) \oplus \mathrm{Hom}(N, Q)$;
5. $(\varinjlim M_i) \otimes N \simeq \varinjlim (M_i \otimes N)$.

3.5 Equivalenza di categorie

Definizione 26. Le categorie $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sono *isomorfe* se esistono funtori

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{B}. \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

con $FG = \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$ e $GF = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$. Sono *equivalenti* se esistono isomorfismi naturali $\eta : \mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \to GF$ e $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$. Ovviamente, categorie isomorfe sono equivalenti.

Definizione 27. Un funtore $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ è *essenzialmente suriettivo* se per ogni $B \in \mathbf{B}$ esiste $A \in \mathbf{A}$ con $B \simeq FA$.

Teorema 28. *Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ equivalenti come sopra. Allora sia F che G sono pieni, fedeli, ed essenzialmente suriettivi, $F \dashv G$ con unità η e counità ε, e $G \dashv F$ con unità ε^{-1} e counità η^{-1}. Viceversa, sia $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ pieno, fedele, ed essenzialmente suriettivo. Allora esiste $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ che induce un equivalenza categoriale fra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.*

Dimostrazione. Ogni $B \in \mathbf{B}$ è isomorfo a FGB via ε_B. Siano $f_1, f_2 : A \to A'$. Poiché η è naturale, i due quadrati

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f_i"'] & GFA \arrow[d, "GFf_i"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & GFA' \end{tikzcd}$$

commutano. Supponiamo $Ff_1 = Ff_2$. Allora $GFf_1 = GFf_2$ e, poiché sia η_A che $\eta_{A'}$ sono isomorfismi, $f_1 = f_2$. Dunque F è fedele, e analogamente lo è G. Sia adesso $f : FA \to FA'$. Allora

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "h=\eta_{A'}^{-1}\circ Gf\circ\eta_A"'] & GFA \arrow[d, "Gf"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & GFA' \end{tikzcd}$$

commuta. Ne segue che $Gf = GFh$. Poiché G è fedele, $f = Fh$, e F è pieno. Analogamente, G è pieno. Per ogni $f : A \to GB$ esiste una ed una sola freccia $h = f \circ \eta_A^{-1}$ che fa commutare il triangolo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "f"'] & GFA \arrow[d, "h"] \\ & GB \end{tikzcd}$$

Poiché G è pieno e fedele, η_A è iniziale in $A \downarrow G$, e dunque $F \dashv G$ con unità η; le altre affermazioni si dimostrano analogamente.
Infine, sia F pieno, fedele, ed essenzialmente suriettivo. Per ogni $B \in \mathbf{B}$, scegliamo $A \in \mathbf{A}$ ed un isomorfismo $\varepsilon_B : FA \to B$. Poniamo $GB = A$. Poiché F è pieno e fedele, possiamo estendere G in modo unico ad un funtore : $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Per costruzione, ε è un isomorfismo naturale. Poiché F è pieno e fedele, $F \dashv G$ con counità ε. Sia η l'unità dell'aggiunzione. Allora

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[d, "F\eta_A"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{FA}"] & \\ FGFA \arrow[r, "\varepsilon_{FA}"'] & FA \end{tikzcd}$$

commuta. Poiché id_{FA} e ε_{FA} sono isomorfismi, lo è anche $F\eta_A$. Poiché F è pieno e fedele, pure η_A è un isomorfismo. $\square$

La seconda parte della precedente dimostrazione non è niente di nuovo: abbiamo sostanzialmente dualizzato il Teorema 22 per mostrare che F ha un aggiunto destro, con counità dell'aggiunzione un isomorfismo. Adesso le identità triangolari e il fatto che F, essendo pieno e fedele, crea gli isomorfismi, mostrano che pure l'unità è un isomorfismo.

Corollario 29. *Se* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono equivalenti come sopra, allora sia* F *che* G *conservano i limiti e i colimiti (in particolare i prodotti, i coprodotti, i monic, e gli epic).*

3.6 Connessioni di Galois

Siano $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ due poset, visti come categorie. Una *connessione di Galois* fra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è una coppia di funtori aggiunti

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbf{B}^\circ. \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

Questo significa semplicemente che F e G sono funzioni order-reversing fra poset e che, per ogni $A \in \mathbf{A}$ e $B \in \mathbf{B}$, si ha

(a) $A \leq GB$ sse $B \leq FA$;

o, equivalentemente, che si ha

(b1) $A \leq GFA$ e $B \leq FGB$ (significa che η e ε sono trasformazioni naturali);

(b2) $FA = FGFA$ e $GB = GFGB$ (le due identità triangolari).

Un *operatore di chiusura* su un poset $(P, \leq)$ è una funzione $\overline{} : P \to P$ che è idempotente ($\overline{\overline{U}} = \overline{U}$), accrescente ($U \subseteq \overline{U}$), e isotona ($U \leq V$ implica $\overline{U} \leq \overline{V}$). Se $(P, \leq) = (\mathcal{P}(S), \subseteq)$, per qualche insieme S, e valgono pure $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{U \cup V} = \overline{U} \cup \overline{V}$, abbiamo un *operatore di chiusura topologico*. In una connessione di Galois sia GF che FG sono operatori di chiusura, rispettivamente su $\mathbf{A}$ e su $\mathbf{B}$.

Sia $R \subseteq S \times T$ una qualsiasi relazione fra due insiemi. Per ogni $U \subseteq S$ e $V \subseteq T$, definiamo

$$U' = \{t \in T : \forall s \in U(sRt)\}$$
$$V' = \{s \in S : \forall t \in V(sRt)\}$$

Allora abbiamo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(S) \arrow[r, shift left, "{'}"] & \mathcal{P}(T)^\circ, \arrow[l, shift left, "{'}"] \end{tikzcd} \tag{9}$$

e si verifica banalmente che

1. $U \subseteq V'$ sse $V \subseteq U'$;
2. $U \subseteq V$ implica $U' \supseteq V'$;
3. $''$ è un operatore di chiusura;
4. $U''' = U'$;
5. $(\bigcup_{i \in I} U_i)' = \bigcap_{i \in I} U_i'$;
6. $(\bigcap_{i \in I} U_i)' \supseteq \bigcup_{i \in I} U_i'$.

Ne segue che (9) è una connessione di Galois. Per ogni $U \subseteq S$, abbiamo $U'' = U$ sse esiste $V \subseteq T$ con $U = V'$ sse esiste $W \subseteq S$ con $U = W''$. Se ciò accade, diciamo che U è un *chiuso*; da (iv) abbiamo che i chiusi formano un reticolo completo con top $S = \emptyset'$ e bottom T'. Analogamente per i chiusi in $\mathcal{P}(T)$. Le mappe $'$ danno antiisomorfismi fra i due reticoli dei chiusi.

Esempio 30.

1. Sia S la classe delle algebre di un tipo fissato, T la classe delle equazioni nel linguaggio dato dal tipo. Poniamo $R = \models$. Allora i chiusi di S sono le classi equazionali, e i chiusi di T sono le teorie equazionali.
2. Come sopra, ma con S la classe delle strutture per un dato linguaggio del primo ordine, e T la classe delle formule in quel linguaggio.
3. S un campo, T un gruppo di automorfismi di quel campo, sRt sse $t(s) = s$. Se T è finito, allora S/T' è un'estensione di Galois e ogni campo intermedio è un chiuso.
4. $S = \mathbb{C}^n$, $T = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, pRf sse $f(p) = 0$. Per definizione, i chiusi di S sono le varietà algebriche affini. Sia $U \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, e sia $\mathfrak{a}$ l'ideale generato da U. Allora $U' = \mathfrak{a}'$ e il Nullstellensatz può essere espresso come $\mathfrak{a}'' = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Dunque, i chiusi di $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ sono esattamente gli ideali radicali.

3.7 Varietà algebriche affini

Siano $X \subseteq \mathbb{C}^n$, $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ varietà algebriche affini, con $X' = \mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e $Y' = \mathfrak{b} \subseteq \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$. L'*algebra delle coordinate*, o *algebra delle funzioni regolari* di X è la $\mathbb{C}$-algebra

$$\operatorname{Coord} X = \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{a}} = \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n].$$

Si tratta di un'algebra finitamente generata e priva di nilpotenti; i suoi elementi sono le *funzioni polinomiali*, o *funzioni regolari* : $X \to \mathbb{C}$ ($f, g \in \mathbb{C}[\bar{x}]$ inducono la stessa funzione su X sse $f - g \in \mathfrak{a}$). Una *mappa regolare* $f : X \to Y$ è una funzione indotta da una m-upla $f = (f_1, \ldots, f_m)$ di elementi di $\operatorname{Coord} X$ tali che $f[X] \subseteq Y$. Sia $\mathbf{V}$ la categoria delle varietà affini e mappe regolari fra esse. Sia $\mathbf{C}$ la categoria delle $\mathbb{C}$-algebre finitamente generate e prive di nilpotenti, con morfismi gli omomorfismi di $\mathbb{C}$-algebre. Ogni $f \in \mathbf{V}[X, Y]$ induce un morfismo $\operatorname{Coord} f = - \circ f : \operatorname{Coord} Y \to \operatorname{Coord} X$ in $\mathbf{C}$; esplicitamente,

$$\frac{g(y_1, \ldots, y_m)}{\mathfrak{b}} \mapsto \frac{g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))}{\mathfrak{a}}.$$

Dunque Coord è un funtore controvariante da $\mathbf{V}$ a $\mathbf{C}$.

Teorema 31. Coord *è pieno, fedele, ed essenzialmente suriettivo.*

Dimostrazione. Ogni $A \in \mathbf{C}$ è della forma $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$, con $\mathfrak{a}$ ideale radicale. Pongo $X = \mathfrak{a}'$ ed ho $A \simeq \operatorname{Coord} X$. Sia

$$\operatorname{Coord} Y = \frac{\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]}{\mathfrak{b}} \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Coord} X = \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{\mathfrak{a}}$$

un omomorfismo di $\mathbb{C}$-algebre. Sia $\varphi(y_i/\mathfrak{b}) = f_i/\mathfrak{a}$, e sia $f : X \to \mathbb{C}^m$ indotta da $(f_1, \ldots, f_m)$. Per ogni $g(y_1, \ldots, y_m) \in \mathfrak{b}$ deve essere $g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathfrak{a}$. Di conseguenza, per ogni $p \in X$ e $g \in \mathfrak{b}$, abbiamo $g(f(p)) = 0$. Ne segue che $f[X] \subseteq Y$, e dunque $f \in \mathbf{V}[X, Y]$, con $\varphi = \operatorname{Coord} f$. Quindi Coord è pieno. Siano $f \neq g : X \to Y$. Allora esiste $p \in X$ tale che w.l.g. $f_1(p) \neq g_1(p)$. Poichè $(f_1 - g_1)(p) \neq 0$, abbiamo $(\operatorname{Coord} f)(y_1/\mathfrak{b}) = f_1/\mathfrak{a} \neq g_1/\mathfrak{a} = (\operatorname{Coord} g)(y_1/\mathfrak{b})$. Quindi Coord è fedele. □

Per il Teorema 28, possiamo costruire un funtore controvariante Max : $\mathbf{V} \leftarrow \mathbf{C}$ che è aggiunto sia destro che sinistro a Coord. Esplicitamente, dato $A \in \mathbf{C}$, scegliamo una rappresentazione $A \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{a}$, e poniamo $\operatorname{Max} A = \mathfrak{a}' \subseteq \mathbb{C}^n$. Il nome Max è giustificato dal fatto che $\mathfrak{a}'$ è in biiezione naturale con MaxSpec A. Infatti, i massimali di A sono in biiezione con gli ideali $(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n) \supseteq \mathfrak{a}$, ovvero con i punti $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ tali che, per ogni $f \in \mathfrak{a}$, è $f(p) = 0$. L'unità dell'aggiunzione Coord $\dashv$ Max è l'isomorfismo

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\eta_X} \operatorname{Max} \operatorname{Coord} X \\ p &\mapsto \{\text{tutte le funzioni regolari su } X \text{ che si annullano in } p\} \\ &\qquad = \text{il massimale localizzato in } p. \end{aligned}$$

Esempio 32.
1. Due varietà algebriche sono isomorfe sse lo sono le corrispondenti algebre delle funzioni regolari.

2. Sia Coord che Max scambiano i monic con gli epic. Poiché $\mathbf{V}$ e $\mathbf{C}$ sono categorie concrete, in entrambe ogni morfismo iniettivo (suriettivo) è monic (epic). In $\mathbf{C}$ ogni monic è iniettivo (perchè il funtore dimenticante $S : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ è un aggiunto destro). In $\mathbf{V}$ un morfismo è epic sse è *dominante*, ovvero ha immagine densa nel codominio con la topologia di Zariski.

3. $\operatorname{Coord}(X \times Y) = \operatorname{Coord} X \amalg \operatorname{Coord} Y$ (si dimostra poi che $\operatorname{Coord} X \amalg \operatorname{Coord} Y$ è il prodotto tensoriale di $\mathbb{C}$-algebre $\operatorname{Coord} X \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Coord} Y$; cfr. [Har77, Exercise I.3.15], o [Lan93, Proposition XVI.6.1]). Per esempio, $\mathbb{C}[x, y] = \operatorname{Coord} \mathbb{C}^2 = \operatorname{Coord} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \operatorname{Coord} \mathbb{C} = \mathbb{C}[x] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[y]$; per l'Esempio 1.1, il coprodotto di due $\mathbb{C}$-algebre libere su un generatore è la $\mathbb{C}$-algebra libera su due generatori.

4. $\operatorname{Coord}(X \cup Y) = \operatorname{Coord} X \times \operatorname{Coord} Y$. Per esempio, siano X e Y due varietà, entrambe costituite da un solo punto. Possiamo rappresentarle come $X = \{0\}, Y = \{1\} \subseteq \mathbb{C}$. Allora $\operatorname{Coord}(C \cup Y) = \mathbb{C}[x]/(x^2 - x) = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \operatorname{Coord} X \times \operatorname{Coord} Y$. L'isomorfismo è indotto dall'epimorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[x] &\to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ f &\mapsto (f(0), f(1)), \end{aligned}$$

il cui kernel è $(x) \cap (x - 1) = (x)(x - 1) = (x^2 - x)$ (poiché $(x) + (x - 1) = (1)$).

5. $\operatorname{Max} A \otimes_{\mathbb{C}} B = \operatorname{Max} A \times \operatorname{Max} B$. La dimostrazione diretta è facile (esercizio), sfruttando la proprietà universale del coprodotto.

6. $\operatorname{Max} A \times B = \operatorname{Max} A \cup \operatorname{Max} B$. Anche questo si può dimostrare direttamente. Infatti, dalle due proiezioni del prodotto nei fattori, abbiamo un'immersione $\operatorname{Max} A \cup \operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A \times B$. Per dimostrare che è suriettiva, sia $\varphi : A \times B \to \mathbb{C}$. Allora uno fra $\varphi(1, 0)$ e $\varphi(0, 1)$ deve essere 0, e l'altro deve essere 1. Infatti, $\varphi(1, 0) \cdot \varphi(0, 1) = \varphi(0, 0) = 0$, e $\varphi(1, 0) + \varphi(0, 1) = \varphi(1, 1) = 1$.

Riferimenti bibliografici

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[Lan93] S. Lang. *Algebra.* Addison-Wesley, 3rd edition, 1993.