Cognome | Nome
Anno imm. | Matricola

Terzo compito di Probabilità I, a.a. 2023-24
20 giugno 2024

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete in giusta misura, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1.

1. Dare la definizione di supporto di una misura su $\mathbb{R}^n$.
2. Enunciare il teorema che caratterizza la convergenza debole delle probabilità su $\mathbb{R}$ in termini delle loro funzioni di ripartizione.
3. Siano $\mu, \mu_0, \mu_1, \dots$ probabilità supportate in $\mathbb{Z}$, e siano $m, m_0, m_1, \dots$ le loro funzioni di densità-discreta. Usando il teorema precedente, dimostrare che μ_n converge debolmente a μ sse $m_n(k)$ converge a $m(k)$ per ogni k.
4. Dare un esempio di applicazione del punto precedente.

Esercizio 2. Sia μ la probabilità uniforme sull'intervallo $[-2, -1]$. Calcolare la funzione di ripartizione di

$$\left(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_{5/2}\right) * \mu.$$

Esercizio 3. Sia $X : \Omega \to [0, 1]$ una variabile aleatoria la cui funzione di ripartizione M è C^1. Mettere in relazione l'area del sottografo

$$\{(x, z) \in [0, 1]^2 : z \leq M(x)\}$$

con il valore atteso di X.