Cognome   Nome
Anno imm.   Matricola

Secondo compito di Probabilità I, a.a. 2022-23
7 febbraio 2023

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete poco, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 0.1. Enunciare e dimostrare la legge 0–1 di Kolmogorov.

Esercizio 0.2. Sia $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ una successione di punti in $[0,1]$, ed ammettiamo che

$$\mu_n = n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\alpha_k}$$

converga debolmente alla probabilità di Lebesgue λ su $[0,1]$.

1. È corretto affermare che per ogni funzione continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si ha $\mu_n(f) \to \lambda(f)$? Se sì, dimostrarlo, se no, dimostrare che non lo è.

2. È corretto affermare che $\mu_n(\mathbb{1}_{[1/4,3/4]}) \to \lambda(\mathbb{1}_{[1/4,3/4]})$? Se sì, dimostrarlo, se no, dimostrare che non lo è.

3. È corretto affermare che per ogni boreliano $A \subseteq [0,1]$ si ha $\mu_n(\mathbb{1}_A) \to \lambda(\mathbb{1}_A)$? Se sì, dimostrarlo, se no, dimostrare che non lo è.

Esercizio 0.3. Enunciare correttamente il teorema del limite centrale. Dimostrare che la tesi del teorema è equivalente alla seguente affermazione:

- $\sqrt{n}(A_n - \mu)$ converge debolmente a $N(0, \sigma^2)$.