Cognome | Nome
Anno imm. | Matricola

Terzo compito di Probabilità I, a.a. 2021-22, 20 giugno 2022

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo. Scrivete in giusta misura, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Enunciare e dimostrare la Legge 0-1 di Kolmogorov.

Esercizio 2. Sia $A_0, A_1, \dots$ una successione di eventi.

1. Dimostrare che
$$P(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n P(A_n).$$

2. Un ubriaco cammina su $\mathbb{Z}$, partendo da 0 e muovendosi a destra o a sinistra con la stessa probabilità. Sia S_n la sua posizione al tempo n e, per $M = 0, 1, 2, \dots$, sia $B_M = \big(\limsup_n S_n/\sqrt{n} > M\big)$. Dimostrare che per ogni M si ha $P(B_M) > 0$. (sugg.: CLT)

3. Dimostrare che per P-ogni ubriaco ω si ha $\limsup_n S_n(\omega)/\sqrt{n} = +\infty$.

Esercizio 3. Introdurre brevemente ma in modo didatticamente valido le densità su $\mathbb{R}^n$.

Svolgimento 1.

Svolgimento 2.

1. Per definizione, $\limsup_n A_n$ è l'intersezione della catena discendente di eventi
$$\bigcup_{k\geq 0} A_k \supseteq \bigcup_{k\geq 1} A_k \supseteq \cdots .$$
Per il teorema sulle misure delle intersezioni di catene, $P(\limsup_n A_n) = \lim_n P\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big)$. D'altronde, $\limsup_n P(A_n)$ è definito come $\lim_n \sup_{k\geq n} P(A_k)$. Poiché, per ogni n, $P\big(\bigcup_{k\geq n} A_k\big)$ è maggiore o uguale di $P(A_k)$ per ogni $k \geq n$, e dunque di $\sup_{k\geq n} P(A_k)$, la maggiorazione richiesta è immediata.

2. Fissiamo M. Per il punto precedente, è sufficiente dimostrare che $\limsup_n P(S_n/\sqrt{n} > M) > 0$. Sia $X_1, X_2, \dots$ un processo stocastico i.i.d., con $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = 1/2$. Allora $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ è la posizione che l'ubriaco ω ha al tempo n. Le X_k hanno media 0 e varianza 1; di conseguenza, il Teorema del Limite Centrale afferma che $S_n/\sqrt{n}$ converge debolmente, per $n \to \infty$ ad una normale standard Z.

   Abbiamo
$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > M\right) = E\left(\mathbb{1}_{[M,\infty]} \circ \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right). \tag{A}$$
   La funzione $\mathbb{1}_{[M,\infty]}$ è limitata, ma non continua; se lo fosse, avremmo immediatamente che il termine di destra converge a
$$E(\mathbb{1}_{[M,\infty]} \circ Z) = (2\pi)^{-1/2} \int_M^\infty \exp(-x^2/2)\, \mathrm{d}x,$$

un numero incredibilmente piccolo per M grande, ma comunque strettamente positivo. La cosa è comunque facilmente rimediabile sostituendo $\mathbb{1}_{[M,\infty]}$ con la funzione continua f che vale 0 in $[-\infty, M]$, vale 1 in $[M+1, \infty]$, ed è lineare in $[M, M+1]$. Con tale sostituzione, l'uguaglianza nell'equazione (A) diviene $\geq$, e otteniamo

$$\limsup_n P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > M\right) \geq \limsup_n E\left(f \circ \frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) = E(f \circ Z) > 0,$$

come richiesto.

3. Per ogni M, l'evento B_M è nella σ-algebra di coda del processo stocastico $X_1, X_2, \ldots$. Per il punto precedente e la legge 0-1 di Kolmogorov, abbiamo $P(B_M) = 1$. Di conseguenza, $P(\limsup_n S_n/\sqrt{n} = +\infty) = P\big(\bigcap_M B_M\big) = 1$.

Svolgimento 3. Tutte le probabilità sulla retta reale $\mathbb{R}$ possono essere efficientemente descritte tramite le relative funzioni di ripartizione. Questo strumento non è più disponibile su $\mathbb{R}^n$ per $n \geq 2$, e di conseguenza dobbiamo accontentarci di descrivere solo certe famiglie di probabilità. Una famiglia facilmente descrivibile è quella delle combinazioni affini, finite o numerabili, di misure di Dirac δ_x, per x punti arbitrari di $\mathbb{R}^n$. Una seconda famiglia, a intersezione vuota con la precedente, è quella delle probabilità indotte da densità. Per definizione, una *densità* su $\mathbb{R}^n$ è una funzione $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in $L_1(\lambda)$ (dunque, per maggiore precisione, una classe di equivalenza di funzioni) tale che $\int_{\mathbb{R}^n} m \, \mathrm{d}\lambda = 1$; qui λ denota la misura n-dimensionale di Lebesgue.

Data una tale densità, la funzione μ_m che associa al boreliano A il numero

$$\mu_m(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A m \, \mathrm{d}\lambda$$

è ben definita. Infatti l'integrando è misurabile (perché prodotto di funzioni misurabili), ha valori nonnegativi, ed è dominato della funzione $m \in L_1(\lambda)$; di conseguenza, $\mu_m(A)$ è un numero ben definito in $[0,1]$. Di fatto, μ_m è una misura; le proprietà $\mu_m(\emptyset) = 0$ e $\mu_m(\mathbb{R}^n) = 1$ sono ovvie, e resta quindi da verificare la σ-additività.

Sia A l'unione disgiunta di una famiglia numerabile $\{A_i\}_{i<\omega}$; allora $\mathbb{1}_A = \sum_i \mathbb{1}_{A_i}$. Di conseguenza, per il teorema preliminare al teorema di Fubini, si ha

$$\mu_m(A) = \int \Big(\sum_i \mathbb{1}_{A_i}\Big) m \, \mathrm{d}\lambda = \int \sum_i (\mathbb{1}_{A_i} m) \, \mathrm{d}\lambda = \sum_i \int \mathbb{1}_{A_i} m \, \mathrm{d}\lambda = \sum_i \mu_m(A_i).$$

Avendo così stabilito che le densità inducono effettivamente probabilità, è naturale chiedersi se densità differenti possono indurre la stessa probabilità. La risposta è negativa, come chiarito nel lemma seguente.

Lemma 0.1. *Sia $\mu = \mu_m = \mu_{m'}$; allora $m = m'$ (come elementi di $L_1(\lambda)$, ovvero λ-quasi-ovunque).*

Infatti, dato $k = 1, 2, \ldots$, sia $A_k = \{x : m(x) + 1/k \leq m'(x)\}$. Allora si ha

$$\mu(A_k) + \frac{1}{k}\lambda(A_k) = \int \mathbb{1}_{A_k}\left(m + \frac{1}{k}\right) \mathrm{d}\lambda \leq \int \mathbb{1}_{A_k} m' \, \mathrm{d}\lambda = \mu(A_k).$$

Ne segue che $\lambda(A_k) = 0$, e quindi $\lambda\big(\bigcup_k A_k\big) = \lambda\{x : m(x) < m'(x)\} = 0$. Abbiamo così stabilito che $m \geq m'$ λ-quasi ovunque. Analogamente si ottiene $m' \geq m$ λ-quasi ovunque, e ne segue che $m = m'$ in $L_1(\lambda)$.