Cognome   Nome
Anno imm.   Matricola

Secondo compito di Probabilità I, a.a. 2021-22, 23 febbraio 2022

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo. Scrivete in giusta misura, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Introdurre brevemente ma in modo didatticamente valido —eventualmente con esempi— la nozione di convergenza debole.

Esercizio 2. Una moneta e un dado onesti vengono lanciati contemporaneamente e ripetutamente. Il giocatore A scommette 5 Euro sul fatto che la moneta dia testa strettamente prima che il dado dia 6. Quanto deve puntare il giocatore B per avere gioco equo?

Esercizio 3. Sia $(X, \mathcal{X}, \mu)$ uno spazio di misura, non necessariamente finita.

1. Dare la definizione di $L_\infty(\mu)$.
2. Assumendo che X sia un insieme numerabile e μ la misura di numerosità, dimostrare che
$$L_1(\mu) \subseteq L_2(\mu) \subseteq \cdots \subseteq L_\infty(\mu).$$

Svolgimento 1.

Svolgimento 2. Siano X e Y le variabili aleatorie a valori in $\{1, 2, 3, \ldots\}$ che danno l'indice del lancio in cui la moneta dà testa per la prima volta (rispettivamente, il dado dà 6 per la prima volta). Ovviamente sono variabili indipendenti, e ho $P(X = k) = (1/2)(1/2)^{k-1} = (1/2)^k$ e $P(Y > k) = (5/6)^k$. Ne segue che $P(X = k \text{ e } Y > k) = (5/12)^k$; poiché gli eventi $(X = k \text{ e } Y > k)$, per $k \in \mathbb{N}$, sono due a due disgiunti, si ha

$$P(X < Y) = \sum_k P(X = k \text{ e } Y > k) = \frac{1}{1 - 5/12} - 1 = 5/7.$$

Il valore atteso di un gioco equo deve essere 0; di conseguenza, essendo x la posta di B, deve valere $(5/7)x - (2/7)5 = 0$. In definitiva B deve puntare 2 Euro.

Svolgimento 3.

1. Per ogni $f : X \to \mathbb{C}$ misurabile poniamo
$$\|f\|_\infty = \inf\{M \in [0, +\infty] : \mu(|f| > M) = 0\}.$$
Sia $\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{f : \|f\|_\infty < +\infty\}$; per definizione, $L_\infty(\mu)$ è il quoziente di tale spazio per la relazione di equivalenza $\|f - g\|_\infty = 0$. È utile osservare che tale relazione di equivalenza ammonta a $f = g$ μ-quasi ovunque; infatti $\|h\|_\infty = 0$ sse per ogni $k = 1, 2, 3, \ldots$ si ha $\mu(|h| > 1/k) = 0$ sse $h = 0$ μ-quasi ovunque.

2. Sia $1 \leq p < q < \infty$ e $f \in L_p(\mu)$. Poiché f ha range numerabile, sappiamo che vale

$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \sum_{x \in X} |f(x)|^p < \infty.$$

Ne segue che $A = \{x : |f(x)| \geq 1\}$ è un insieme finito, e questo implica immediatamente che $f \in L_\infty(\mu)$. Inoltre

$$\sum_{x \in X} |f(x)|^q \leq \sum_{x \in A} |f(x)|^q + \sum_{x \notin A} |f(x)|^p < \infty;$$

quindi $f \in L_q(\mu)$.