Cognome Nome
Anno imm. Matricola

Quarto compito di Probabilità I, a.a. 2020-21, svolto in presenza il 19.07.2021

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo, aggiungendo al più un foglio. Scrivete in giusta misura, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Dimostrare che esiste un aperto $U \subseteq [0,1]$ la cui misura di Lebesgue è strettamente minore di quella della sua chiusura (suggerimento: enumerare i razionali).

Esercizio 2. Enunciare e dimostrare le leggi (debole e forte) dei grandi numeri.

Esercizio 3. Sia $\mu_1 = (\delta_0 + \delta_2)/2$ e sia μ_2 la probabilità uniforme su $[1,5]$.

1. Dare un esempio di probabilità μ su $\mathbb{R}^2$ avente μ_1 a μ_2 come marginali.
2. Dare un secondo esempio, diverso dal precedente, di tale probabilità.
3. Descrivere (per esempio dando la funzione di ripartizione, o eventualmente la funzione di densità) la misura $\mu_1 * \mu_2$.

Svolgimento 1. Sia $q_0, q_1, \dots$ una fissata enumerazione dei razionali in $[0,1]$. Per ogni indice k, sia $B_k = (q_k - 2^{-(3+k)}, q_k + 2^{-(3+k)}) \cap [0,1]$; si tratta di un intervallo aperto (nella topologia standard di $[0,1]$) di misura di Lebesgue minore o uguale a $2^{-(2+k)}$. Sia U l'aperto $\bigcup_k B_k$; per σ-subaddititità si ha $0 < \lambda(U) \leq \sum_k 2^{-(2+k)} = 1/2$. D'altra parte U contiene tutti i razionali; dunque la sua chiusura è $[0,1]$, che ha misura di Lebesgue 1.

Svolgimento 2.

Svolgimento 3. Per brevità, indichiamo con $\mathrm{un}_{[a,b]}$ la probabilità uniforme sull'intervallo $[a,b]$; con questa notazione, $\mu_2 = \mathrm{un}_{[1,5]}$. Notiamo che $\mathrm{un}_{[a,b]}$ ha densità $m_{[a,b]} = (b-a)^{-1}\mathbb{1}_{[a,b]}$.

1. L'esempio più semplice è $\mu = \mu_1 \times \mu_2$; la massa è distribuita uniformemente sui due segmenti $\{0\} \times [1,5]$ e $\{2\} \times [1,5]$, la cui unione costituisce il supporto di μ.
2. Un secondo esempio è
$$\nu = \frac{1}{2}(\delta_0 \times \mathrm{un}_{[1,3]}) + \frac{1}{2}(\delta_2 \times \mathrm{un}_{[3,5]});$$
di nuovo la massa è distribuita uniformemente su due segmenti sul piano, diversi dai precedenti.
3. Abbiamo
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2\right) * \mathrm{un}_{[1,5]} &= \frac{1}{2}\delta_0 * \mathrm{un}_{[1,5]} + \frac{1}{2}\delta_2 * \mathrm{un}_{[1,5]} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{un}_{[1,5]} + \frac{1}{2}\mathrm{un}_{[3,7]}.\end{aligned}$$
Tale misura ha densità $(m_{[1,5]} + m_{[3,7]})/2$, che ha valore 0 all'esterno di $[1,7]$, valore $1/8$ in $[1,3] \cup [5,7]$, e valore $1/4$ in $[3,5]$; notiamo che il valore in $\{1,3,5,7\}$ è irrilevante.