Cognome | Nome
Anno imm. | Matricola

Secondo compito di Probabilità I, a.a. 2020-21, svolto in modalità telematica il 22.02.2021

Scrivete nome, cognome e numero di matricola su **tutti** i fogli che trasmettete (al massimo 5). La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{S}$ la semialgebra degli intervalli in $\mathbb{R}$. Definiamo λ su $\mathcal{S}$ in modo che abbia valore $a-b$ su $(b,a]$, valore 0 sul vuoto, e $+\infty$ sugli intervalli illimitati. Dimostrare che λ è σ-subadditiva.

Esercizio 2. Sia $(X,\mathcal{X},\mu)$ uno spazio di misura, non necessariamente finita. Introdurre, con le necessarie dimostrazioni, gli spazi $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ e $L_\infty(\mu)$.

Esercizio 3. Siano date le funzioni $A(x)=(1/3)x$ e $B(x)=(1/3)x+2/3$ su $[0,1]$. Sia $Q:\mathcal{P}([0,1])\to\mathcal{P}([0,1])$ definito da $Q\nu=(1/2)A_*\nu+(1/2)B_*\nu$.

1. Disegnare la funzione di ripartizione di $Q(Q(\delta_0))$.
2. Scrivere $\widehat{Q\nu}(s)$ in funzione di $\hat{\nu}(s)$.
3. Assumere che $Q\nu=\nu$, e dimostrare che $\hat{\nu}(s)$ non tende a 0, per $|s|\to\infty$ (sugg.: considerate $\hat{\nu}(2\pi 3s)$).

Esercizio 4. Enunciare correttamente e dimostrare il teorema di continuità di Levy (per la seconda parte potete lavorare su $\mathbb{R}$, e assumere che il teorema di Helly sia applicabile).