

Cognome
Anno imm.

Nome
Matricola

**Primo compito di Probabilità I, a.a. 2020-21,
svolto in modalità telematica il 21.01.2021**

Scrivete nome, cognome e numero di matricola su **tutti** i fogli che trasmettete (al massimo 5). La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Calcolare φ_X , dove X è una normale standard.

Esercizio 2. Sia $<$ un ordine totale su $[0, 1]$ avente la proprietà che per ogni x l'insieme $\{y : y < x\}$ è numerabile (sotto opportune ipotesi di teoria degli insiemi, un tale ordine esiste). Sia $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\}$. Se $\mathbb{1}_A$ è in $L_1(\lambda^2)$, calcolarne l'integrale; se non lo è, dimostrare che non lo è (suggerimento: usare il teorema di Fubini).

Esercizio 3. 1. Dare la definizione di densità su \mathbb{R}^d .

2. Dimostrare che due densità che inducono la stessa probabilità sono uguali.

3. Dare un esempio (che non sia una somma finita di misure di Dirac) di probabilità su \mathbb{R}^2 che non ha una densità.

Esercizio 4. Dimostrare che una misura finitamente additiva su una semialgebra può essere estesa in modo unico all'algebra generata. Trattare anche il caso in cui la misura di partenza è σ -subadditiva.