Cognome Nome
Anno imm. Matricola

Quinto compito di Probabilità I, a.a. 2019-20, svolto in modalità telematica il 23.09.2020

Scrivete nome, cognome e numero di matricola su **tutti** i fogli che trasmettete (al massimo 5). La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $F : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ definita da

$$(F(\omega))_i = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega_i = 1 \text{ e } \omega_{i+1} = 2; \\ 1, & \text{se } \omega_i = 0 \text{ e } \omega_{i+1} = 2; \\ \omega_i, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione F è misurabile? Se sì dimostrarlo, se no dimostrare che non lo è.

Esercizio 2. Dimostrare che ogni funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$ è un limite puntuale crescente di funzioni a scala.

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare la legge forte dei grandi numeri.

Esercizio 4. Siano X normale di parametri $(0, \sigma^2)$ e Y uniforme di parametri $(0, \pi)$.

1. Calcolare la distribuzione di $\sqrt{2}\cos(Y)$ e disegnarne il grafico approssimativo.
2. (Facoltativo) Assumendo che X e Y siano indipendenti, spiegare (eventualmente con un disegno) come si potrebbe calcolare la distribuzione di $X + \sqrt{2}\cos(Y)$.