

Cognome
Anno imm.

Nome
Matricola

**Quarto compito di Probabilità I, a.a. 2019-20,
svolto in modalità telematica il 09.09.2020**

Scrivete nome, cognome e numero d'ordine del foglio su **tutti** i fogli che trasmettete (al massimo 5). La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Dare un esempio di una semialgebra che non è un'algebra, e di un'algebra che non è una σ -algebra. Dimostrare che una funzione $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ è misurabile sse le X -controimmagini degli insiemi $(-\infty, a]$, con a reale, appartengono a \mathcal{F} .

Esercizio 2. Sia (X, \mathcal{X}, μ) uno spazio di misura.

1. Assumere che μ sia finita, e dimostrare che $L_5(\mu) \subseteq L_3(\mu)$.
2. Dare un esempio di una μ per cui $L_3(\mu)$ sia contenuto strettamente in $L_5(\mu)$.

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare il Teorema del Limite Centrale.

Esercizio 4. Sia X_0, X_1, \dots una successione di v.a. reali, con $\mu_n = (X_n)_*P$. Assumiamo che la successione dei secondi momenti $E(X_n^2)$ sia limitata. Dimostrare che μ_0, μ_1, \dots è stretta. Sostituendo nell'ipotesi i secondi momenti con le varianze, la conclusione continua a valere?