

Cognome  
Anno imm.

Nome  
Matricola

**Quarto compito di Probabilità I, a.a. 2019-20,  
svolto in modalità telematica il 09.09.2020**

Scrivete nome, cognome e numero d'ordine del foglio su **tutti** i fogli che trasmettete (al massimo 5). La durata della prova è di 2 ore.

**Esercizio 1.** Dare un esempio di una semialgebra che non è un'algebra, e di un'algebra che non è una  $\sigma$ -algebra. Dimostrare che una funzione  $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  è misurabile sse le  $X$ -controimmagini degli insiemi  $(-\infty, a]$ , con  $a$  reale, appartengono a  $\mathcal{F}$ .

**Esercizio 2.** Sia  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  uno spazio di misura.

1. Assumere che  $\mu$  sia finita, e dimostrare che  $L_5(\mu) \subseteq L_3(\mu)$ .
2. Dare un esempio di una  $\mu$  per cui  $L_3(\mu)$  sia contenuto strettamente in  $L_5(\mu)$ .

**Esercizio 3.** Enunciare e dimostrare il Teorema del Limite Centrale.

**Esercizio 4.** Sia  $X_0, X_1, \dots$  una successione di v.a. reali, con  $\mu_n = (X_n)_*P$ . Assumiamo che la successione dei secondi momenti  $E(X_n^2)$  sia limitata. Dimostrare che  $\mu_0, \mu_1, \dots$  è stretta. Sostituendo nell'ipotesi i secondi momenti con le varianze, la conclusione continua a valere?