

Cognome
Anno imm.

Nome
Matricola

Terzo compito di Probabilità I, a.a. 2019-20, svolto in modalità telematica il 22.06.2020

Scrivete nome, cognome e numero di matricola su **tutti** i fogli che trasmettete (al massimo 5). La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Enunciare e dimostrare la legge 0-1 di Kolmogorov.

Esercizio 2. Siano $R : (X, \mathcal{X}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{Y})$ e $f : (Y, \mathcal{Y}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ entrambe misurabili. Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra l'integrazione fatta rispetto a μ e quella fatta rispetto a $R_*\mu$.

Esercizio 3. Siano X, Y variabili reali i.i.d.. Dimostrare che $Z = X - Y$ ha una distribuzione simmetrica.

Esercizio 4. Siano $V_1, V_2, \dots, W_1, W_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due successioni di v.a.. Ammettiamo che $V_n \rightarrow V$ e che $W_n \rightarrow w$, dove w è una costante fissata, con convergenza debole in entrambi i casi. Dimostrare che $V_n + W_n$ converge debolmente a $V + w$. Dimostrare che la cosa non è necessariamente vera se w non è costante.