

Cognome
Anno imm.

Nome
Matricola

Terzo compito di Probabilità I, a.a. 2018-19
24 giugno 2019

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete in giusta misura, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $m \in L_1(\lambda)$, dove λ è la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^d , con $m \geq 0$ e $\lambda(m) = 1$. Dimostrare che la funzione $\mu_m : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ definita da

$$\mu_m(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A m \, d\lambda$$

è una probabilità, e che la mappa $m \mapsto \mu_m$ è iniettiva.

Esercizio 2. Enunciare la legge forte dei grandi numeri. Usarla per calcolare $\lambda(A)$, dove A è l'insieme degli $x = 0.c_1c_2c_3 \dots \in [0, 1]$ tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \leq n : c_i = 5\}}{n} = \frac{1}{10}.$$

Esercizio 3. Siano $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_{>0}$, e sia $X(a, b) : (\Omega, P) \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile aleatoria distribuita uniformemente nell'intervallo $[a - b, a + b]$.

1. Calcolare $\varphi_{X(a,b)}$.
2. Tenendo fisso a , studiare l'eventuale convergenza debole di $X(a, b)$ per b tendente a 0 e a $+\infty$.
3. Tenendo fisso b , studiare l'eventuale convergenza debole di $X(a, b)$ per a tendente a $+\infty$ e a $-\infty$.

Esercizio 4. Dare un esempio di una successione di probabilità μ_0, μ_1, \dots tendente debolmente a μ , e di $f \in L_1(\mu) \cap L_1(\mu_0) \cap L_1(\mu_1) \cap \dots$, con $\int f \, d\mu_n$ non tendente a $\int f \, d\mu$.