

Cognome  
Anno imm.

Nome  
Matricola

**Primo compito di Probabilità I, a.a. 2018-19**  
**24 gennaio 2019**

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete poco, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

**Esercizio 1.** Dare la definizione di trasformata di Fourier della probabilità  $\mu$  su  $\mathbb{R}^d$  e dimostrare che si tratta di una funzione uniformemente continua.

**Esercizio 2.** Un'urna contiene 8 palle rosse e 5 nere. Viene estratta una palla, eliminata, sostituita con due palle del colore opposto, ed estratta una seconda palla.

1. Calcolare la probabilità che le due palle estratte siano dello stesso colore.
2. Calcolare la probabilità che la prima palla sia rossa, sapendo che la seconda è rossa.

**Esercizio 3.** Sia  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ , sia  $b_n = (-1)^n a_n$  e sia

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{b_k}.$$

Dire se  $\mu_n$  converge debolmente a qualche misura, e dimostrare quanto affermato.

**Esercizio 4.** Siano  $X, Y : \Omega \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$  indipendenti con  $P(X = n) = P(Y = n) = 1/2^n$ . Calcolare  $P(\min(X, Y) \leq n)$  e  $P(Y > X)$ .