

Cognome  
Anno imm.

Nome  
Matricola

**Quinto compito di Probabilità I, a.a. 2017-18**  
**17 settembre 2018**

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete poco, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

**Esercizio 1.** Siano  $f_0, f_1, \dots : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  tutte misurabili. Dimostrare che  $\sup f_n$ ,  $\inf f_n$ ,  $\limsup f_n$ ,  $\liminf f_n$  sono tutte misurabili.

**Esercizio 2.** Sia  $p_0, p_1, p_2, \dots$  una successione in  $(0, 1)$ . Per ogni  $n$ , sia  $X_n$  una v.a. che assume valore 0 con probabilità  $1 - p_n$ , e valore  $n$  con probabilità  $p_n$ . Dimostrare che:

- se  $p_n$  converge a 0, allora  $X_n$  converge debolmente;
- se  $p_n > r$  per qualche fissato  $r > 0$ , allora  $X_n$  non converge debolmente.

**Esercizio 3.** Due variabili poissoniane indipendenti  $X, Y$  hanno medie  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 4$ , rispettivamente,

- Calcolare  $P(X + Y \leq 3)$ .
- Calcolare la densità-discreta di  $Z = (X|X + Y = 8)$  e ricondurla, se possibile, ad una densità nota.