Cognome Nome
Anno imm. Matricola

Secondo compito di Probabilità I, a.a. 2017-18
19 febbraio 2018

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete poco, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $\mathcal{R}$ l'insieme di tutte le unioni finite di intervalli (di ogni tipo: aperti, semiaperti, ...) in $[0,1]$. Sia $Q : \mathcal{R} \to \{0,1\}$ la funzione che vale 1 se l'argomento contiene, per qualche $\varepsilon > 0$, l'intervallo $(1/2, 1/2+\varepsilon]$, e vale 0 altrimenti. Dire, giustificando le proprie affermazioni, se $\mathcal{R}$ è una semialgebra/algebra/σ-algebra, e se Q è una misura f.a./misura.

Esercizio 2. Siano X, Y v.a. geometriche indipendenti, di parametri p e q, rispettivamente. Dimostrare che $Z = \min(X, Y)$ è geometrica, e calcolarne il parametro.

Esercizio 3. Siano X, Y i.i.d., e assumiamo che $X+Y$ e $X-Y$ siano indipendenti fra loro. Dimostrare che $\varphi_X(2u) = \varphi_X(u)^3\varphi_X(-u)$.

Esercizio 4. Enunciare e dimostrare il Teorema della Moltiplicazione.

Svolgimento 1. La famiglia $\mathcal{R}$ è un'algebra; infatti è ovviamente chiusa per unioni finite, e contiene sia l'insieme vuoto che $[0,1]$. È sufficiente dunque dimostrare che $\mathcal{R}$ è chiusa per passaggio al complemento; lo facciamo per induzione sul numero minimo $m \geq 0$ di intervalli la cui unione dà $R \in \mathcal{R}$. Se $m = 0$, allora $R = \emptyset$ e $R^c = [0,1] \in \mathcal{R}$. Altrimenti $R = S \cup I$, e sia $S^c = \bigcup_j J_j$ che $I^c = \bigcup_k K_k$ sono unioni finite di intervalli; questo è vero per S per ipotesi induttiva, mentre è vero per I perché il complementare di un singolo intervallo è l'unione di al più due intervalli. Ne segue che

$$R^c = \Big(\bigcup_j J_j\Big) \cap \Big(\bigcup_k K_k\Big) = \bigcup_{j,k}(J_j \cap K_k)$$

è un elemento di $\mathcal{R}$, perché ogni intersezione $J_j \cap K_k$ di due intervalli è un intervallo (eventualmente vuoto). Non si tratta di una σ-algebra; infatti l'unione numerabile

$$\bigcup_{n\geq 0}\left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right]$$

di elementi di $\mathcal{R}$ non appartiene a $\mathcal{R}$.

La funzione Q è una misura finitamente additiva su $\mathcal{R}$, ma non è una misura. Infatti, $Q(\emptyset) = 0$ e $Q([0,1]) = 1$. Sia $R = R_1 \cup \cdots \cup R_n$ un'unione disgiunta finita di elementi di $\mathcal{R}$. Se $Q(R) = 0$, allora R non contiene alcun intervallo della forma indicata; a maggior ragione nessun R_i lo contiene, e dunque $Q(R_i) = 0$ per ogni i. Viceversa, se $Q(R) = 1$ allora esattamente uno degli R_i deve contenere un intervallo della forma indicata; infatti se, diciamo, sia R_1 che R_2 contenessero un tale intervallo, avremmo $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$. In entrambi i casi si ha $Q(R) = Q(R_1) + \cdots + Q(R_n)$, come richiesto dalla finita additività.

L'identità

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right] = \left(\frac{3}{4}, 1\right] \cup \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \cup \left(\frac{9}{16}, \frac{5}{8}\right] \cup \cdots$$

mostra che un elemento di $\mathcal{R}$ di Q-misura 1 può essere scritto come unione numerabile disgiunta di elementi di $\mathcal{R}$ di Q-misura 0; questo contraddice la σ-additività.

Svolgimento 2. È più conveniente caratterizzare il fatto che X sia geometrica di parametro p tramite l'identità $P(X \geq n) = (1-p)^n$, che deve valere per ogni $n \geq 0$. Tale caratterizzazione è corretta perché, da un lato,

$$P(X \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(X = k) = 1 - p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n,$$

mentre dall'altro lato,

$$P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1) = (1-p)^n - (1-p)^{n+1} = p(1-p)^n.$$

Fatta questa premessa, abbiamo

$$\begin{aligned} P(Z \geq n) = P(X \geq n \text{ e } Y \geq n) = P(X \geq n) \cdot P(Y \geq n) \\ = (1-p)^n(1-q)^n = (1-(p+q-pq))^n. \end{aligned}$$

Dunque Z è geometrica di parametro $p+q-pq$.

Svolgimento 3. Abbiamo

$$\varphi_{2X} = \varphi_{(X+Y)+(X-Y)} = \varphi_{X+Y}\varphi_{X-Y} = \varphi_X\varphi_Y\varphi_X\varphi_{-Y} = \varphi_X^3\varphi_{-X};$$

infatti pure X e $-Y$ sono indipendenti, mentre $-X$ e $-Y$ sono identicamente distribuite. Ne segue che

$$\varphi_X(2u) = \varphi_{2X}(u) = \varphi_X(u)^3\varphi_{-X}(u) = \varphi_X(u)^3\varphi_X(-u).$$