

Cognome
Anno imm.

Nome
Matricola

Primo compito di Probabilità I, a.a. 2017-18
22 gennaio 2018

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete poco, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Enunciare e dimostrare la legge 0-1 di Kolmogorov.

Esercizio 2. Sia $X = (X_1, X_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ avente la densità m_X . Calcolare la densità di $Y = (2X_1 + X_2, X_1 - X_2)$.

Esercizio 3. Dimostrare che se φ è una funzione caratteristica, allora lo è pure $|\varphi|^2$.

Esercizio 4. Siano $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \{1, \dots, 24\}$ i.i.d., con funzione di densità-discreta m mai 0. Siano Y_1, Y_2, \dots nuove variabili, definite da

$$Y_n(\omega) = P(\{\omega' : \forall i \leq n X_i(\omega') = X_i(\omega)\}).$$

Dimostrare che $-\log(Y_n)/n$ converge a.e. ad una costante, e calcolare tale costante.