

Cognome  
Anno imm.

Nome  
Matricola

**Quarto compito di Probabilità I, a.a. 2015-16**  
**9 settembre 2016**

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete poco, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

**Esercizio 1.** Dimostrare che la trasformata di Fourier  $\hat{\mu}$  della probabilità  $\mu$  su  $\mathbb{R}$  è uniformemente continua.

**Esercizio 2.** Sia  $F$  la funzione su  $\mathbb{R}$  definita da

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mathbb{1}_{[1/k, \infty)}.$$

1. Dimostrare che  $F$  induce una probabilità  $P$  su  $\mathbb{R}$ .
2. Calcolare  $P([1, \infty))$ ,  $P(\{0\})$ ,  $P([1/10, \infty))$ .
3. Dare un esempio di variabile aleatoria  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che sia in  $L_1(P) \setminus L_2(P)$ .

**Esercizio 3.** Dimostrare che una funzione di ripartizione su  $\mathbb{R}$  non può avere un insieme di punti di discontinuità di cardinalità più che numerabile.