

Cognome  
Anno imm.

Nome  
Matricola

**Secondo compito di Probabilità I, a.a. 2015-16**  
**29 giugno 2016**

Dovete consegnare **solamente** la bella copia, per la quale dovete usare il foglio di testo; lo spazio è sufficiente. Scrivete poco, chiaramente, e in buon italiano; non potete usare calcolatrici, appunti o libri. Scrivete subito il vostro nome, cognome e numero di matricola, e tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

**Esercizio 1.** Enunciare correttamente e dimostrare la Legge 0-1 di Kolmogorov.

**Esercizio 2.** Sia  $X$  una variabile aleatoria reale con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ , entrambe finite. Sia  $d > 1$ . Dimostrare che

$$P(\mu - d\sigma < X < \mu + d\sigma) \geq 1 - \frac{1}{d^2}.$$

**Esercizio 3.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  lo spazio  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , dotato della misura prodotto  $1/2$ - $1/2$ .

1. Per ogni  $n \geq 1$ , costruire una variabile aleatoria  $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  distribuita uniformemente sull'intervallo  $[0, n]$ .
2. Eventualmente modificando la costruzione precedente, fare in modo che le  $X_n$  convergano in probabilità ad una qualche variabile aleatoria  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ; se ciò non è possibile, dimostrare tale impossibilità.