Cognome | Nome
Anno imm. | Matricola

Quinto compito di Probabilità I, a.a. 2019-20, svolto in modalità telematica il 23.09.2020

Scrivete nome, cognome e numero di matricola su **tutti** i fogli che trasmettete (al massimo 5). La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $F : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ definita da

$$(F(\omega))_i = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega_i = 1 \text{ e } \omega_{i+1} = 2; \\ 1, & \text{se } \omega_i = 0 \text{ e } \omega_{i+1} = 2; \\ \omega_i, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione F è misurabile? Se sì dimostrarlo, se no dimostrare che non lo è.

Esercizio 2. Dimostrare che ogni funzione misurabile $f : X \to [0, +\infty]$ è un limite puntuale crescente di funzioni a scala.

Esercizio 3. Enunciare e dimostrare la legge forte dei grandi numeri.

Esercizio 4. Siano X normale di parametri $(0, \sigma^2)$ e Y uniforme di parametri $(0, \pi)$.

1. Calcolare la distribuzione di $\sqrt{2}\cos(Y)$ e disegnarne il grafico approssimativo.
2. (Facoltativo) Assumendo che X e Y siano indipendenti, spiegare (eventualmente con un disegno) come si potrebbe calcolare la distribuzione di $X + \sqrt{2}\cos(Y)$.

Esercizio 1 La funzione F è non solo misurabile, ma continua. Per dimostrare ciò, è sufficiente verificare che la controimmagine di un blocco è un'unione finita di blocchi. Questo è senz'altro vero per il blocco di lunghezza 0.

Sia $\ell \geq 0$ arbitrario; allora ho

$$(F\omega)_\ell = 0 \quad \text{sse} \quad (\omega_\ell = 0 \wedge \omega_{\ell+1} = 0) \vee (\omega_\ell = 0 \wedge \omega_{\ell+1} = 1) \vee (\omega_\ell = 1 \wedge \omega_{\ell+1} = 2).$$

In altre parole, $F^{-1}[\underbrace{* \cdots *}_{\ell-1} 0] = [* \cdots * 0 0] \cup [* \cdots * 0 1] \cup [* \cdots * 1 2]$. (1)

Ottengo analogamente

$$F^{-1}[* \cdots * 1] = [* \cdots * 1 0] \cup [* \cdots * 1 1] \cup [* \cdots * 0 2] \qquad (2)$$

$$F^{-1}[* \cdots * 2] = [* \cdots * 2] \qquad (3)$$

Lavoro adesso per induzione sulla lunghezza $\ell \geq 1$ del blocco.

Per $\ell = 1$ le identità (1), (2), (3) mi dicono direttamente che, per ogni $a_0 \in \{0,1,2\}$, si ha che $F^{-1}[a_0]$ è un'unione finita di blocchi.

Per $\ell > 1$ ho $F^{-1}[a_0 - a_{\ell-1}\, a_\ell] = F^{-1}([a_0 - a_{\ell-1}] \cap [\underbrace{* \cdots *}_{\ell-1} a_\ell]) =$

$= F^{-1}[a_0 - a_{\ell-1}] \cap F^{-1}[* \cdots * a_\ell]$. Per ipotesi induttiva e le identità (1), (2), (3) ottengo che $F^{-1}[a_0 - a_{\ell-1}\, a_\ell]$ è un'intersezione di unioni finite di blocchi. Dunque, per la proprietà distributiva, è un'unione finita di blocchi. $\blacksquare$