Nome, cognome

Numero di matricola:

	Es. 1			Es. 2	Es. 3			Es. 4
	1.a	1.b	1.c		3.a	3.b	3.c	
Punti								
su max.	2	4	4	4	2	6	6	4

6 settembre 2024
III Appello di Algebra Lineare

Esercizio 1. a) Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli.
b) Si determini la dimensione dello spazio (affine) delle soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro m:

$$\begin{cases} 2x - y & = & 1 \\ mx + y & = & 1 + m \\ x + my + mz & = & 0 \end{cases}$$

c) Si determini la soluzione per $m = 2$.

Esercizio 2. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita, sia

$$f \colon V \times V \to \mathbb{R}$$

una forma bilineare simmetrica su V, sia W un sottoinsieme non vuoto di V e sia $W^{\perp}$ l'ortogonale di W rispetto a f .
Si provi che $W^{\perp}$ è un sottospazio di V.

Esercizio 3. a) Si diano le definizioni di *autovalore* ed *autovettore* di un'applicazione lineare.
b) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e non nullo e sia $\gamma \colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\gamma(\gamma(v)) = v$ per ogni $v \in V$. Si provi che se λ è un autovalore per γ allora $\lambda \in \{-1, 1\}$.
c) Con le ipotesi del punto b), si ponga

$$V^{+} := \{v \in V | \gamma(v) = v\} \text{ e } V^{-} := \{v \in V | \gamma(v) = -v\}.$$

Si provi che V^{+} e V^{-} sono sottospazi di V e che $V = V^{+} \oplus V^{-}$.

Esercizio 4. Si determini la dimensione dell'ortogonale dello spazio

$$span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare usuale.

Esercizio 1. Es. 1.b) La matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante (sviluppato per la terza colonna) è

$$m(2+m)$$

che si annulla per $m = 0$ e $m = -2$. Per il Teorema di Rouché-Capelli, per tutti i valori di m diversi da 0 e da -2 il sistema ammette un'unica soluzione (la dimensione dello spazio delle soluzione quindi è 0). Se $m = 0$ la matrice dei coefficienti diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, infatti il determinante del minore 2×2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è 2, che è diverso da 0. Ne segue che la matrice dei coefficienti ha rango 2. La matrice completa del sistema per $m = 0$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3: il minore che si ottiene cancellando la terza colonna è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, sviluppando il suo determinante per la terza riga, si ottiene -2. Per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema non ammette soluzioni, perché il rango della matrice dei coefficienti non coincide con il rango della matrice completa.

Supponiamo ora che $m = -2$

la matrice dei coefficienti diventa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, infatti il determinante del minore 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

è -2, che è diverso da 0. Ne segue che la matrice dei coefficienti ha rango 2. La matrice completa del sistema per $m = -2$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

che ha ancora rango 2 perché le prime due righe sono proporzionali.

Per il Teorema di Rouché-Capelli lo spazio delle soluzioni ha dimensione $3 - 2 = 1$ (numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti).

Es. 1c) $2 \notin \{0, -2\}$, quindi, per $m = 2$, il sistema ha un'unica soluzione. ed il sistema diviene

$$\begin{cases} 2x - y & = & 1 \\ 2x + y & = & 3 \\ x + 2y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

sottraendo la prima riga alla seconda si ottine il sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x - y & = & 1 \\ 2y & = & 2 \\ x + 2y + 2z & = & 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 2x - 1 & = & 1 \\ y & = & 1 \\ x + 2 + 2z & = & 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Esercizio 2 Dobbiamo mostrare che $W^\perp$ è chiuso per la somma di vettori e per il prodotto per scalari. Ricordo che

$$W^\perp := \{z \in V | f(z, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W\}.$$

Chiusura rispetto alla somma di vettori: siano u e v in $W^\perp$, allora per ogni $w \in W$

$$f(u, w) = 0 \text{ e } f(v, w) = 0,$$

dunque, per la bilinearità di f

$$f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w) = 0 + 0 = 0,$$

e quindi $u + v \in W^\perp$.

Chiusura rispetto al prodotto per scalari: sia $v \in W^\perp$ e sia λ uno scalare, allora, per la bilinearit di f, per ogni $w \in W$,

$$f(\lambda v, w) = \lambda f(v, w) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

da cui anche $\lambda v \in W^\perp$.

Esercizio 3. b) Sia a un autovalore di γ e sia $\mathbf{v}$ un autovettore relativo a γ. Allora

$$\gamma(\mathbf{v}) = a\mathbf{v}$$

e quindi

$$\mathbf{v} = \gamma(\gamma(\mathbf{v}) = \gamma(a\mathbf{v}) = a(\gamma(\mathbf{v})) = a(a\mathbf{v}) = a^2\mathbf{v},$$

da cui segue che

$$(1 - a^2)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Poiché $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ otteniamo che

$$a^2 = 1$$

e quindi $a = 1$ oppure $a = -1$. c) V^+ e V^- sono sottospazi perché autospazi (possibilmente nulli) per gli autovalori 1 e -1 rispettivamente.

Sia $v \in V$, poniamo

$$v^+ := v + \gamma(v) \text{ e } v^- = v - \gamma(v).$$

Chiaramente

$$v = \frac{1}{2}v^+ + \frac{1}{2}v^-.$$

Inoltre, poiché γ è lineare e $\gamma(\gamma(v)) = v$, otteniamo

$$\begin{aligned} \gamma(v^+) &= \gamma(v + \gamma(v)) = \gamma(v) + \gamma(\gamma(v) \\ &= \gamma(v) + v = v + \gamma(v) = v^+ \end{aligned}$$

dunque $v^+ \in V^+$ (e quindi $\frac{1}{2}v^+ \in V^+$).

Similmente

$$\begin{aligned} \gamma(v^-) &= \gamma(v - \gamma(v)) = \gamma(v) - \gamma(\gamma(v) \\ &= \gamma(v) - v = -(v - \gamma(v)) = -v^- \end{aligned}$$

dunque $v^- \in V^-$ (e quindi $\frac{1}{2}v^- \in V^-$).

Ne segue che ogni vettore di V è somma di un vettore di V^+ e di un vettore di V^-, dunque

$$V = V^+ + V^-.$$

Resta da dimostrare che $V^+ \cap V^- = \{0\}$. Sia infatti $w \in V^+ \cap V^-$ Poiché $w \in V^+$, segue che

$$w = \gamma(w). \tag{1}$$

D'altra parte, poiché anche $w \in V^-$, segue che

$$\gamma(w) = -w. \tag{2}$$

Quindi da (1) e (2) segue che $w = -w$ e dunque $w = 0_V$.

Esercizio 4 Il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è diverso dal vettore nullo, quindi genera un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1. Per la formula sulla dimensione dell'ortogonale, dim $W^\perp = dim(\mathbb{R}^3) - dim(W) = 3 - 1 = 2$.