Nome:

Cognome:

Numero di matricola:

	Es. 1			Es. 2	Es. 3			Es. 4
	1.a	1.b	1.c		3.a	3.b	3.c	
Punti								
su max.	3	3	3	7	2	4	4	6

Esame di Matematica per Architettura
27 febbraio 2020
Prova di Geometria

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{R}$

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x - y + z &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 4x - 5y + 3z &= 5 \end{cases}$$

a) Si determini la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato;
b) Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato;
c) Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathcal{S}$.

Esercizio 2. Siano U e W sottospazi vettoriali di uno spazio V. Si dimostri il Teorema di Grassmann, cioè che $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Esercizio 3. a) Si diano le definizioni di *autovalore* ed *autovettore* di un'applicazione lineare.

b) sia $\gamma\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determinino gli autovalori e gli autovettori di γ.
c) Si dica se esiste una base rispetto alla quale la matrice associata a γ si scrive in forma diagonale e si determini tale base.

Esercizio 4. Nel piano euclideo bidimensionale si determini la distanza della retta di equazione $3x - y = 3$ dal vettore nullo.

Esercizio 1.
a) Il determinante delIa matrice dei coefficienti ‘e

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Sottraendo alla terza riga 2 volte la prima ed una volta la seconda, otteniamo che il determinante ‘e

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Poichè il minore di ordine 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

ha determinante $-3+2=-1 \neq 0$, la matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi, per il Teorema di Rouché-Capelli, l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato ha dimensione 1 (numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti).

b) Sottraendo alla terza equazione del sistema omogeneo 2 volte la prima ed una volta la seconda, e sommando alla seconda equazione la prima otteniamo il sistema omogeneo equivalente

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x - y + z & = & 0 \\ x - 2y & = & 0 \end{cases}$$

da cui, per ogni numero reale t otteniamo la soluzione $x = 2t$, $y = t$ e $z = -t$. In particolare, lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ generato dal vettore

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Sottraendo alla terza equazione di $\mathcal{S}$ 2 volte la prima ed una volta la seconda, otteniamo il sistema equivalente:

$$\mathcal{S} := \begin{cases} x - y + z & = & 1 \\ 2x - 3y + z & = & 0 \\ 0 & = & 3 \end{cases}$$

che, chiaramente, non ha soluzioni, quindi l'insieme delle soluzioni del sistema $\mathcal{S}$ è vuoto.

Esercizio 2. Vedere la dimostrazione sui testi consigliati.

Esercizio 3. b) Calcolo il polinomio caratteristico di γ (sviluppo il determinante per l'ultima colonna):

$$\det\begin{pmatrix} x & -9 & 0 \\ \\ -1 & x & 0 \\ \\ -1 & -2 & x-3 \end{pmatrix} = (x)^2 - 4$$

$$= (x-3)(x^2-9) = (x-3)(x-3)(x+3)$$

che ha come soluzioni 3 e -3. Calcolo gli autovettori per l'autovalore 3: Un vettore non nullo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

è un autovettore relativo all'autovalore 3 se e solo se

$$\begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9y \\ x \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$$

da cui ottengo il sistema

$$\begin{cases} -3x+9y & = & 0 \\ x-3y & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{cases}$$

Osservo che la prima equazione è un multiplo della seconda, quindi, cancellando la prima riga ottengo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x-3y & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{cases}$$

che, a sua volta (sostituendo la seconda riga con la differenza della seconda e della prima) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5y & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{cases}$$

Da cui (sostituendo 0 a y nella seconda riga) ottengo che $x = y = 0$ (mentre z può essere arbitrario).

Dunque lo spazio delle soluzioni (cioè l'insieme degli autovettori relativi all'autovalore 3) è l'insieme

$$V_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \rangle.$$

Analogamente, un vettore non nullo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

è un autovettore relativo all'autovalore -3 se e solo se

$$\begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9y \\ x \\ x+2y+3z \end{pmatrix}$$

da cui ottengo il sistema

$$\begin{cases} 3x+9y & = & 0 \\ x+3y & = & 0 \\ x+2y+6z & = & 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso la prima equazione è un multiplo della seconda, quindi, cancellando la prima riga ottengo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x & = & -3y \\ x+2y+6z & = & 0 \end{cases}$$

che, a sua volta (sostituendo nella seconda riga x con $-3y$) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x & = & -3y \\ y & = & 6z \end{cases}$$

Quindi posso scegliere z arbitrariamente, $y = 6z$ e $x = -3y = -18z$. Dunque lo spazio delle soluzioni (cioè l'insieme degli autovettori relativi all'autovalore 3) è l'insieme

$$V_{-3} := \left\{ \begin{pmatrix} -18t \\ 6t \\ t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ t \end{pmatrix} \rangle.$$

c) Non esiste una tale base, infatti lo spazio generato dagli autovettori di γ è $V_3 + V_{-3}$ ed è generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \\ t \end{pmatrix}$$

Quindi gli autovettori di γ generano un sottospazio di dimensione 2 che è strettamente minore della dimensione di $\mathbb{R}^3$

Es. 4) La retta s dei vettori ortogonali alla retta r è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3t \\ -t \end{pmatrix} | t \in \mathbf{R} \right\}$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} 3t \\ -t \end{pmatrix} \in r \cap s$$

se e solo se

$$3 \cdot 3t + t = 3$$

cioè se e solo se $t = 3/10$. Ne segue che il vettore

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

appartiene a r ed è ortogonale a r e quindi la sua lunghezza:

$$\sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(-\frac{3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{81+9}{100}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

è uguale alla distanza di r dall'origine.